

第5章・章末問題と解答

1 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ は Maclaurin の級数に展開される．その収束半径は 1 である．最初の二、三の項は

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \cdots \right) .$$

<解> $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log(1+x)}$ は $|x| < 1$ において正則であるが、 $x = -1$ が分岐点だから Maclaurin 級数の収束半径は 1 である．その展開は、

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{e} &= e^{\frac{1}{x} \log(1+x) - 1} = e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \cdots} \\ &= 1 - x \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \cdots \right) + \frac{x^2}{2!} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \cdots \right)^2 \\ &\quad - \frac{x^3}{3!} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + \cdots \right)^3 + \cdots \\ &= 1 - x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \cdots \right) + \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + \frac{13}{36}x^2 + \cdots \right) - \frac{1}{3!}x^3 \left(\frac{1}{8} + \cdots \right) + \cdots \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \cdots . \end{aligned}$$

wxMaxima で計算すると、

$$\frac{f(x)}{e} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} - \frac{7x^3}{16} + \frac{2447x^4}{5760} - \frac{959x^5}{2304} + \frac{238043x^6}{580608} - \frac{67223x^7}{165888} + \frac{559440199x^8}{1393459200} - \frac{123377159x^9}{309657600} + \cdots$$

となる．殆ど意味はないが…． ■

2 $x = a$ が解析関数 $f(x), g(x)$ の零点ならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} ,$$

但し、 $\lim$ として ∞ も許容する．また n は $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a) = 0$ でない最初の番号である．

例えば (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x+x^2) + \log(1-x+x^2)}{x \sin x} = 1$

<解> $f(x), g(x)$ を $x = a$ のまわりで Taylor 展開すれば $f(a) = g(a) = 0$ だから、

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ g(x) &= g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

今、 $f'(a) = g'(a) = 0$ でなければ、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^2 + \cdots}{g'(a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a) + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^2 + \cdots}$$

となるから、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$

$f'(a) = g'(a) = 0$ であれば,

$$f(x) = \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$g(x) = \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

そこで, もし $f''(a) = g''(a) = 0$ でなければ,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f''(a)}{2!} + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a) + \cdots}{\frac{g''(a)}{2!} + \frac{g'''(a)}{3!}(x-a) + \cdots}$$

となるから, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

以下, 同様に繰り返せば題意を得る.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x+x^2) + \log(1-x+x^2)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2+x^4)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x+4x^3}{1+x^2+x^4}}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+4x^3}{(1+x^2+x^4)(\sin x + x \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+12x^2}{(2x+4x^3)(\sin x + x \cos x) + (1+x^2+x^4)(2 \cos x - x \sin x)} = \frac{2}{2} = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3 以下の式が成立することを示せ.

$$(1^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$$

$$(2^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$(3^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

<解> $(1^\circ) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{ax \rightarrow 0} \left((1+ax)^{\frac{1}{ax}} \right)^a = e^a.$

$(2^\circ) \quad x > 0$ としてよい.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \log \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{\tan x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \tan x - \log x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2x^2 \sin x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2} \sin 2x}{x^2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2 \sin 2x + 4x \cos 2x + 4x \cos 2x - 4x^2 \sin 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x}{4 \cos 2x + 4 \cos 2x - 8x \sin 2x + 4 \cos 2x - 8x \sin 2x - 8x \sin 2x - 8x^2 \cos 2x} \\ &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \quad \therefore \text{極限值} = e^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

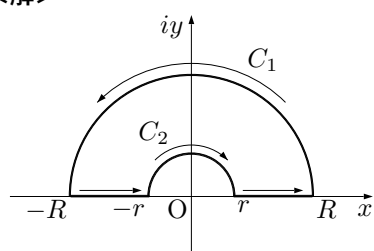
(3°) $x = \frac{1}{t}$ とおく.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \log \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{t}} &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\log \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\log \frac{2}{\pi} + \log \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \right)}{\operatorname{Arctan} \frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{-1}{\operatorname{Arctan} \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2 + 1} \right) = \frac{-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} \therefore \text{極限值} = e^{-\frac{2}{\pi}}. \blacksquare \end{aligned}$$

4

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} (b - a) \quad (a > 0, b > 0)$$

<解>



複素平面上, 左図に示す閉曲線 C を考える. C の経路は,
 $R \rightarrow Re^{i\theta}$ (θ は 0 から π) $\rightarrow -R \rightarrow -r \rightarrow re^{i\phi}$ (ϕ は π から 0) $\rightarrow$
 $r \rightarrow R$.

この C に沿った積分 $\int_C \frac{e^{iaz}}{z^2} dz$ を考える.

$$\Re \left(\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{x^2} dx \right) = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2} dx \text{ を用いる.}$$

$\frac{e^{iaz}}{z^2}$ は C の内部と周上で正則だから, $\int_C \frac{e^{iaz}}{z^2} dz = 0$ であり, C を具体的に書き下していくと,

$$\int_{C_1} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x^2} dx + \int_{C_2} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz + \int_r^R \frac{e^{iax}}{x^2} dx = 0.$$

$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x^2} dx$ において $x = -t$ とおくと, $\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x^2} dx = \int_r^R \frac{e^{-iat}}{t^2} dt$ だから, 結局

$$\int_r^R \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{x^2} dx + \int_{C_1} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz + \int_{C_2} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz = 0. \quad (66)$$

を得る.

(66) の左辺第 2 項の積分は $z = Re^{i\theta}$ ($\theta: 0 \rightarrow \pi$) として,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz &= \int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{i\theta}}}{R^2 e^{i2\theta}} \cdot iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} d\theta = i \int_0^\pi \frac{e^{i(aR \cos \theta + iaR \sin \theta)}}{Re^{i\theta}} d\theta \\ &= i \int_0^\pi \frac{e^{iaR \cos \theta} \cdot e^{-aR \sin \theta}}{Re^{i\theta}} d\theta \end{aligned}$$

$$\left| \int_{C_1} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{iaR \cos \theta} \cdot e^{-aR \sin \theta}}{Re^{i\theta}} \right| d\theta \leq \int_0^\pi \frac{e^{-aR \sin \theta}}{R} d\theta \leq \int_0^\pi \frac{1}{R} d\theta \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\therefore r_1 := \int_{C_1} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \quad (67)$$

(66) の左辺第 3 項の積分は $z = re^{i\phi}$ ($\phi: \pi \rightarrow 0$) として,

$$\int_{C_2} \frac{e^{iaz}}{z^2} dz = \int_{C_2} \left(\frac{1}{z^2} + ia \cdot \frac{1}{z} + P(z) \right) dz$$

とおくと, $P(z)$ は全複素平面上で絶対収束するので連続. よって C_2 上での最大値を M とすると,

$$\left| \int_{C_2} P(z) dz \right| \leq M \cdot \int_{C_2} ds = M \cdot \pi r .$$

$$\therefore r_2 := \int_{C_2} P(z) dz \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0) . \quad (68)$$

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2} = \int_{\pi}^0 \frac{ire^{i\phi}}{r^2 e^{i2\phi}} d\phi = \frac{i}{r} \int_{\pi}^0 e^{-i\phi} d\phi = \frac{i}{r} \int_{\pi}^0 (\cos \phi - i \sin \phi) d\phi = \frac{i}{r} \left[\sin \phi + i \cos \phi \right]_{\pi}^0 = -\frac{2}{r} .$$

$$\int_{C_2} \frac{1}{z} dz = \int_{\pi}^0 i d\phi = -i\pi . \text{ 以上より, (66) は,}$$

$$\int_r^R \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{x^2} dx + r_1 + r_2 - \frac{2}{r} + a\pi = 0 .$$

実部をとって,

$$2 \int_r^R \frac{\cos ax}{x^2} dx = \frac{2}{r} - a\pi - (\Re(r_1) + \Re(r_2))$$

$$\therefore \int_r^R \frac{\cos ax}{x^2} dx = \frac{1}{r} - \frac{a\pi}{2} - \frac{\Re(r_1) + \Re(r_2)}{2} .$$

$$\int_r^R \frac{\cos bx}{x^2} dx \text{ についても同様だから,}$$

$$\therefore \int_r^R \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = -\frac{a\pi - b\pi}{2} - \frac{\Re(r_1) + \Re(r_2) - \Re(r'_1) - \Re(r'_2)}{2} .$$

ここで $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ とすると, (67), (68) より, $\Re(r_1) \rightarrow 0$, $\Re(r_2) \rightarrow 0$, $\Re(r'_1) \rightarrow 0$, $\Re(r'_2) \rightarrow 0$ だから, $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{(b-a)\pi}{2}$. ■

5

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}$$

<解> 区間 $[0, +\infty)$ で積分可能な任意の関数 $f(x)$ について,

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-i2ax} dx = \int_0^{+\infty} f(x) (\cos 2ax - i \sin 2ax) dx = \int_0^{+\infty} f(x) \cos 2ax dx - i \int_0^{+\infty} f(x) \sin 2ax dx$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} f(x) \cos 2ax dx = \Re \left(\int_0^{+\infty} f(x) e^{-i2ax} dx \right)$$

だから, 問題の積分は

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx &= \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-i2ax} dx \right) = \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2 - i2ax} dx \right) = \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x+ia)^2 + a^2} dx \right) \\ &= \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} \cdot e^{-a^2} dx \right) = \Re \left(e^{-a^2} \int_0^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx \right) = e^{-a^2} \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx \right) \end{aligned}$$

ここに、積分 $\int_0^{+b} e^{-(x+ia)^2} dx$ は、複素平面上の函数 $f(z) = e^{-z^2}$ について、

複素平面上の直線 $z = x + ia$ (a は定数) に沿った積分 $\int_{ia}^{b+ia} e^{-z^2} dz$ と等価であると考えられ、また

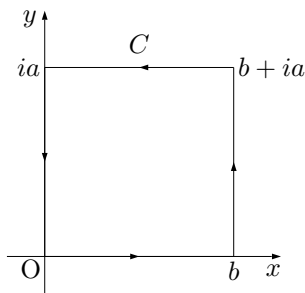
$f(z) = e^{-z^2}$ は z の全ての領域で正則だから、任意の閉曲線 C に沿って $\int_C e^{-z^2} dz$ を計算すれば 0 になる。

そこで閉曲線 C として、点 $ia, b + ia$ を結ぶ直線を含むようなものを考え、

$$\int_C e^{-z^2} dz = 0$$

を考え、その実部について検討すれば良い。

左図のような長方形 C を考えると、 e^{-z^2} は C の内部および周上で正則だから、



$$\begin{aligned} 0 &= \int_C e^{-z^2} dz \\ &= \int_0^b e^{-z^2} dz + \int_b^{b+ia} e^{-z^2} dz + \int_{b+ia}^{ia} e^{-z^2} dz + \int_{ia}^0 e^{-z^2} dz \end{aligned} \quad (69)$$

(69) の第 1 項の積分 $\int_0^b e^{-z^2} dz$ は直線 $z = x$ に沿った積分で、

$$\begin{array}{c|c} z & 0 \rightarrow b \\ \hline x & 0 \rightarrow b \end{array} \text{ また } dz = dx \text{ だから,}$$

$$\int_0^b e^{-z^2} dz = \int_0^b e^{-x^2} dx \quad (70)$$

(69) の第 2 項の積分 $\int_b^{b+ia} e^{-z^2} dz$ については、直線 $z = b + iy$ に沿った積分で $\begin{array}{c|c} z & b \rightarrow b+ia \\ \hline y & 0 \rightarrow a \end{array}$ また、 $dz = idy$ だから、

$$\begin{aligned} \int_b^{b+ia} e^{-z^2} dz &= i \int_0^a e^{-(b+iy)^2} dy = i \int_0^a e^{-(b^2+i2by-y^2)} dy = i \int_0^a e^{-b^2-i2by+y^2} dy = ie^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \cdot e^{-i2by} dy \\ &= ie^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} (\cos 2by - i \sin 2by) dy = e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \sin 2by dy + ie^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \cos 2by dy \end{aligned} \quad (71)$$

(69) の第 3 項の積分 $\int_{b+ia}^{ia} e^{-z^2} dz$ については直線 $z = x + ia$ に沿った積分で $\begin{array}{c|c} z & b+ia \rightarrow ia \\ \hline x & b \rightarrow 0 \end{array}$ $dz = dx$ だから、

$$\begin{aligned} \int_{b+ia}^{ia} e^{-z^2} dz &= \int_b^0 e^{-(x+ia)^2} dx = \int_b^0 e^{-x^2-i2ax+a^2} dx = e^{a^2} \int_b^0 e^{-x^2-i2ax} dx \\ &= e^{a^2} \int_b^0 e^{-x^2} (\cos 2ax - i \sin 2ax) dx = e^{a^2} \int_b^0 e^{-x^2} \cos 2ax dx - ie^{a^2} \int_b^0 e^{-x^2} \sin 2ax dx \end{aligned} \quad (72)$$

(69) の第 4 項の積分 $\int_{ia}^0 e^{-z^2} dz$ については、直線 $z = iy$ に沿った積分で、 $\begin{array}{c|c} z & ia \rightarrow 0 \\ \hline y & a \rightarrow 0 \end{array}$ また、 $dz = idy$ だから、

$$\int_{ia}^0 e^{-z^2} dz = i \int_a^0 e^{y^2} dy \quad (73)$$

以上より (69) は,

$$\begin{aligned}
& \int_0^b e^{-x^2} dx + e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \sin 2by dy + ie^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \cos 2by dy \\
& \quad + e^{a^2} \int_b^0 e^{-x^2} \cos 2ax dx - ie^{a^2} \int_b^0 e^{-x^2} \sin 2ax dx + i \int_a^0 e^{y^2} dy \\
& = \left(\int_0^b e^{-x^2} dx + e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \sin 2by dy + e^{a^2} \int_b^0 e^{-x^2} \cos 2ax dx \right) \\
& \quad + i \left(e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \cos 2by dy - e^{a^2} \int_b^0 e^{-x^2} \sin 2ax dx + \int_a^0 e^{y^2} dy \right) = 0 \quad (74)
\end{aligned}$$

(74) において, その “実部 = 0” だから, ^{*24}

$$\begin{aligned}
& e^{a^2} \int_0^b e^{-x^2} \cos 2ax dx = \int_0^b e^{-x^2} dx + e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \sin 2by dy \\
& \therefore \int_0^b e^{-x^2} \cos 2ax dx = e^{-a^2} \int_0^b e^{-x^2} dx + e^{-a^2} \cdot e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \sin 2by dy \quad (75)
\end{aligned}$$

(75) において右辺の第 2 項は, $|\sin 2by| \leq 1$ により,

$$\left| e^{-a^2} \cdot e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \sin 2by dy \right| = e^{-b^2} e^{-a^2} \left| \int_0^a e^{y^2} \sin 2by dy \right| \leq e^{-b^2} \left(e^{-a^2} \int_0^a |e^{y^2} dy| \right) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0 .$$

従って, (75) において $b \rightarrow \infty$ とすると,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx = e^{-a^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2} . \quad \blacksquare$$

<別解> $f(x) = e^{-x^2} \cos 2ax$ は偶関数だから,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx$$

が成り立ち,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\cos 2ax - i \sin 2ax) dx \right) = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-i2ax} dx \right) .$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-i2ax} dx = F(a) \quad (76)$$

として, $F'(a)$ を計算する.

$$\begin{aligned}
F'(a) &= \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-i2ax} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d}{da} (e^{-i2ax}) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (-i2x) e^{-i2ax} dx \\
&= i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2x) e^{-x^2} e^{-i2ax} dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-x^2})' e^{-i2ax} dx \\
&= i \left(\left[e^{-x^2} \cdot e^{-i2ax} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (-i2a) e^{i2ax} dx \right) = -2a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{i2ax} dx
\end{aligned}$$

^{*24} (74) において, その “虚部 = 0” だから,

$$\begin{aligned}
& e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \cos 2by dy - e^{a^2} \int_b^0 e^{-x^2} \sin 2ax dx + \int_a^0 e^{y^2} dy = 0 \text{ より,} \\
& e^{a^2} \int_0^b e^{-x^2} \sin 2ax dx = \int_0^a e^{y^2} dy - e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \cos 2by dy . \text{ ここで } b \rightarrow \infty \text{ とすると, } e^{-b^2} \int_0^a e^{y^2} \cos 2by dy \rightarrow 0 \text{ だから,} \\
& \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2ax dx = e^{-a^2} \int_0^\infty e^{x^2} dx \text{ を得る.}
\end{aligned}$$

$$\therefore F'(a) = -2aF(a)$$

$\frac{F'(a)}{F(a)} = -2a$ だから, $\int \frac{F'(a)}{F(a)} da = \int -2a da \therefore \log |F(a)| = -a^2 + c$ を得る.

$$\therefore F(a) = Ce^{-a^2} \quad (77)$$

ここに (76) より, $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ だから, (77) において, $a = 0$ とすると, $F(0) = C = \sqrt{\pi}$ となる. 従って, $F(a) = \sqrt{\pi}e^{-a^2}$.

この $F(a)$ は, a が実数である限り実数値をとるから, $\Re(F(a)) = F(a)$ となって,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = \frac{1}{2} \Re(F(a)) = \frac{1}{2} F(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

を得る. ■

6

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{ax^4 + bx^2 + c} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{c}\sqrt{b+2\sqrt{ac}}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

<解> $t = x^2$ とおくと,

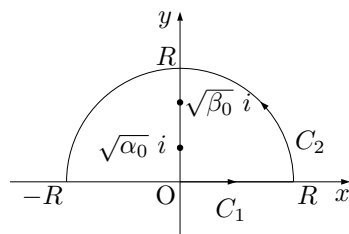
$$at^2 + bt + c = 0 \quad (78)$$

2つの解を t_1, t_2 とすると, $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} < 0, t_1 t_2 = \frac{c}{a} > 0$ だから実数解を持つなら $t_1 < 0, t_2 < 0$. よって (78) について次の3つの場合が生じる.

- (i) 相異なる2つの負根 ($\alpha < \beta < 0$)
- (ii) 相等しい負根 (重根)
- (iii) 実根を有しない (虚数解 α, β)

(i) $\alpha < \beta < 0$ とする.

$$\begin{aligned} at^2 + bt + c &= a(t - \alpha)(t - \beta) = a(x^2 - \alpha)(x^2 - \beta) \\ (\alpha &= -\alpha_0, \beta = -\beta_0 \text{ とおいて}) \\ &= a(x + \sqrt{\alpha_0}i)(x - \sqrt{\alpha_0}i)(x + \sqrt{\beta_0}i)(x - \sqrt{\beta_0}i) \end{aligned}$$



左図の積分路について,

$$\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{az^4 + bz^2 + c} = 2\pi i \left(\text{Res}(\sqrt{\alpha_0}i) + \text{Res}(\sqrt{\beta_0}i) \right) \quad (79)$$

但し, $\text{Res}(\sqrt{\alpha_0}i)$ は $z = \sqrt{\alpha_0}i$ における留数.

$$\begin{aligned} \text{Res}(\sqrt{\alpha_0}i) + \text{Res}(\sqrt{\beta_0}i) &= \frac{1}{a \cdot 2\sqrt{\alpha_0}i(\alpha_0 i^2 - \beta_0 i^2)} + \frac{1}{a \cdot 2\sqrt{\beta_0}i(\beta_0 i^2 - \alpha_0 i^2)} \\ &= -\frac{1}{2a i(\alpha_0 - \beta_0)} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} - \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} \right) = -\frac{1}{2a i(\alpha_0 - \beta_0)} \cdot \frac{\sqrt{\beta_0} - \sqrt{\alpha_0}}{\sqrt{\alpha_0}\beta_0} \\ &= \frac{1}{2a i(\sqrt{\beta_0} + \sqrt{\alpha_0})\sqrt{\alpha_0}\beta_0} \end{aligned} \quad (80)$$

ここで $\sqrt{\alpha_0\beta_0} = \sqrt{\alpha}\beta = \sqrt{\frac{c}{a}}$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\alpha_0} + \sqrt{\beta_0}\right)^2 &= \alpha_0 + \beta_0 + 2\sqrt{\alpha_0\beta_0} = \frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{b + 2\sqrt{ac}}{a} \\ \therefore \sqrt{\alpha_0} + \sqrt{\beta_0} &= \frac{\sqrt{b + 2\sqrt{ac}}}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

(80) より,

$$\text{Res}(\sqrt{\alpha_0} i) + \text{Res}(\sqrt{\beta_0} i) = \frac{1}{2a i} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b + 2\sqrt{ac}}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}\sqrt{b + 2\sqrt{ac}} i} . \quad (81)$$

また,

$$\int_{C_1} = \int_{-R}^0 \frac{dx}{ax^4 + bx^2 + c} + \int_0^R \frac{dx}{ax^4 + bx^2 + c} = 2 \int_0^R \frac{dx}{ax^4 + bx^2 + c} \quad (82)$$

また, $|z|$ が十分大ならば $|az^4 + bz^2 + c| \asymp |az^4| > |az^3|$ であるから,

$$\left| \int_{C_2} \right| \leq \frac{1}{aR^3} \int_{|z|=R} dz = \frac{1}{aR^3} \cdot \pi R = \frac{\pi}{aR^2} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (83)$$

(79), (80), (81), (82), (83) より, $R \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \frac{dz}{az^4 + bz^2 + c} &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{c}\sqrt{b + 2\sqrt{ac}} i} \\ \therefore \int_0^\infty \frac{dz}{az^4 + bz^2 + c} &= \frac{\pi}{2\sqrt{c}\sqrt{b + 2\sqrt{ac}}} \end{aligned}$$

(ii) 相等しい負根 (重根)

$$b^2 - 4ac = 0 \text{ だから, } at^2 + bt + c = a \left(t + \frac{b}{2a} \right)^2 \text{ から,}$$

$$ax^4 + bx^2 + c = a \left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2$$

と表される.

$$\int_0^R \frac{dx}{ax^4 + bx^2 + c} = \int_0^R \frac{dx}{a \left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2}$$

において, $x = \sqrt{\frac{b}{2a}} \tan \theta$ で変数変換する. $R = \sqrt{\frac{b}{2a}} \tan \alpha$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{dx}{a \left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2} &= \int_0^\alpha \frac{\sqrt{\frac{b}{2a}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}}{a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^4 \theta}} d\theta = \int_0^\alpha \frac{1}{a} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{a} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^\alpha = \frac{1}{a} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{a} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{4} \quad (\because R \rightarrow \infty \text{ のとき, } \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{\pi\sqrt{a}}{b\sqrt{2b}} . \end{aligned}$$

一方, $b^2 - 4ac = 0$ により $c = \frac{b^2}{4a}$ であるから,

$$\frac{\pi}{2\sqrt{c}\sqrt{b+2\sqrt{ac}}} = \frac{\pi}{2 \cdot \frac{b}{2\sqrt{a}} \sqrt{b+2 \cdot \frac{b}{2}}} = \frac{\pi}{\frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{2b}} = \frac{\pi\sqrt{a}}{b\sqrt{2b}}$$

であるから,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{ax^4 + bx^2 + c} = \frac{\pi}{2\sqrt{c}\sqrt{b+2\sqrt{ac}}}$$

を得る.

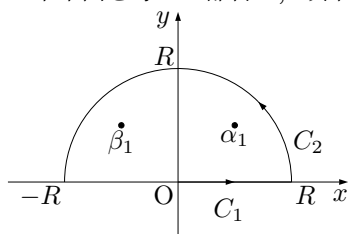
(iii) 実根を有しない (虚数解 α, β)

$at^2 + bt + c = 0$ は実数係数の 2 次方程式だから, $\alpha = \bar{\beta}$ であり, $z^2 = \alpha$ の解を $z = \alpha_1$ とすると, 他の解は $-\alpha_1$ であり, $\beta = \bar{\alpha}$ だから, 残りの解は $\pm\bar{\alpha}_1$ である. 結局,

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - \alpha_1)(x + \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1)(x + \bar{\alpha}_1)$$

となっている.

上半平面を考える都合上, 以下 $\beta_1 = -\bar{\alpha}_1$ とおく.



左図の積分路について,

$$\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{az^4 + bz^2 + c} = 2\pi i (Res(\alpha_1) + Res(\beta_1)) \quad (84)$$

$$\begin{aligned} Res(\alpha_1) + Res(\beta_1) &= \frac{1}{a \cdot 2\alpha_1(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1)} + \frac{1}{a \cdot 2\beta_1(\beta_1 + \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_1)} \\ &= \frac{1}{2a(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 + \beta_1)} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_1} \right) = -\frac{1}{2a\alpha_1\beta_1(\alpha_1 + \beta_1)} \end{aligned}$$

さて, ここで

$$(\alpha_1 + \beta_1)^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 = -\frac{b}{a} - 2\sqrt{\frac{c}{a}} = -\frac{1}{a}(b + 2\sqrt{ac})$$

$$\odot \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha_1^2\beta_1^2 = \alpha\beta = \frac{c}{a}, \beta_1 = -\bar{\alpha}_1 \text{ より, } \alpha_1\beta_1 = -|\alpha_1|^2 < 0 \text{ だから, } \alpha_1\beta_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

$$\therefore \alpha_1 + \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{a}(b + 2\sqrt{ac})} i$$

(i) と同様にして, 求める積分を I とすると,

$$2I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2a}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}(b + 2\sqrt{ac})} i} \cdot \left(-\sqrt{\frac{a}{c}}\right) = \frac{2\pi}{2\sqrt{c}\sqrt{b+2\sqrt{ac}}}.$$

以上により, 示された. ■

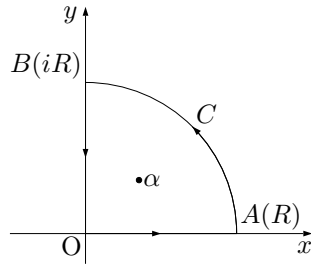
7

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^4)^{n+1}} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{3 \cdot 7 \cdots (4n-1)}{n! \cdot 4^n}$$

<解> まず最初に,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

を示す．そのために函数 $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ を考える．この函数は $\alpha = \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{4}\right)$ で 1 位の極を持つのでその留数を求める．



$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z) &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{z - \alpha}{(z - \alpha)(z + \alpha)(z - i\alpha)(z + i\alpha)} \\ &= \frac{1}{4\alpha^3} = \frac{\exp\left(-\frac{3}{4}\pi i\right)}{4} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

α を含む左図のような閉曲線を C とすると,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left(-\frac{1+i}{4\sqrt{2}} \right) \quad (85)$$

$$\begin{aligned}\int_C &= \int_{OA} + \int_{\widehat{AB}} + \int_{BO} \\ &= \int_0^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{iRe^{i\theta}}{1+R^4e^{i4\theta}} d\theta + i \int_R^0 \frac{1}{1+y^4} dy\end{aligned}$$

ここで,

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{iRe^{i\theta}}{1+R^4e^{i4\theta}} d\theta \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{1-R^4} d\theta \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\therefore \int_C f(z) dz = (1-i) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} dx.$$

(85) より, $(1-i) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} dx = 2\pi i \left(-\frac{1+i}{4\sqrt{2}} \right)$ よって,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad (86)$$

を得た．

次に $a > 0$ として, (86) において, $x = a^{-\frac{1}{4}}y$ とおく．

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx = \int_0^\infty \frac{a^{\frac{3}{4}}}{a+y^4} dy$$

変数を x に代えて,

$$\int_0^\infty \frac{1}{a+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{4}} \quad (87)$$

絶対収束性により a での微分と可換である．ここで,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^4)^{n+1}} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdots (4n-1) a^{-\frac{4n+3}{4}}}{n! \cdot 4^n} \quad (88)$$

と仮定する． $n=0$ のときは, (87) から成立している．(88) の両辺を a で微分する．

$$\int_0^\infty \frac{-(n+1)dx}{(a+x^4)^{n+2}} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdots (4n-1) \cdot \frac{-(4n+3)}{4} \cdot a^{-\frac{4n+7}{4}}}{n! \cdot 4^n}$$

これより,

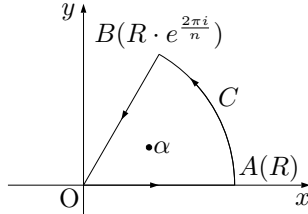
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^4)^{n+2}} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdots (4n-1)(4n+3) a^{-\frac{4n+7}{4}}}{(n+1)! \cdot 4^{n+1}} \quad (89)$$

となるので $n+1$ でも成立した．(88) において, $a=1$ を代入することで示された．■

8

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} \quad (\text{但し } m, n \text{ は正の整数で } m < n)$$

<解>



$O(0), A(R), B(R e^{\frac{2\pi i}{n}})$ で囲まれる扇形の周 C 上で

$f(z) = \frac{z^{m-1}}{1+z^n}$ を積分する. $\alpha = e^{\frac{\pi i}{n}}$ は 1 次の極であり, 留数 $\text{Res}(f(z), \alpha)$ は次のように計算される.

$$1+z^n = (z-\alpha)(z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}z + \alpha^{n-1}) \quad \text{だから,}$$

$$\text{Res}(f(z), \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z-\alpha) f(z) = \frac{\alpha^{m-1}}{n\alpha^{n-1}} = \frac{1}{n} \alpha^{m-n} = \frac{1}{n} \left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^{m-n} = -\frac{1}{n} e^{\frac{m\pi i}{n}}$$

留数定理により

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{n} e^{\frac{m\pi i}{n}}\right) \quad (90)$$

$$\text{左辺} = \int_{OA} f(x) dx + \int_{\widehat{AB}} f(z) dz + \int_{BO} f(z) dz \quad (91)$$

第 1 項の積分については $R \rightarrow \infty$ のとき, $\int_{OA} f(x) dx \rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$.

第 3 項の積分については, $\int_{BO} f(z) dz = -\int_{OB} f(z) dz$ であり,

$$\int_{OB} f(z) dz = \int_0^R \frac{\left(re^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{m-1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}}{1 + \left(re^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n} dr = e^{\frac{2\pi i m}{n}} \int_0^R \frac{r^{m-1}}{1+r^n} dr$$

第 2 項の積分については, $z = Re^{i\theta}$ より $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ なので,

$$\int_{\widehat{AB}} f(z) dz = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R^{m-1} e^{i(m-1)\theta}}{1 + R^n e^{in\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iR^m e^{im\theta}}{1 + R^n e^{in\theta}} d\theta$$

より,

$$\left| \int_{\widehat{AB}} f(z) dz \right| \leq \frac{R^m}{R^n - 1} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{R^{n-m} - \frac{1}{R^m}} \cdot \frac{2\pi}{n} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (\odot \quad n > m)$$

(90), (91) より,

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i m}{n}}\right) \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = 2\pi i \left(-\frac{1}{n} e^{\frac{m\pi i}{n}}\right) \quad \text{を整理して,}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{e^{\frac{m\pi i}{n}}}{e^{\frac{2\pi i m}{n}} - 1} = \frac{2\pi i}{n} \frac{1}{e^{\frac{\pi i m}{n}} - e^{-\frac{\pi i m}{n}}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi m}{n}} \quad \blacksquare$$

9

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \pi e^{-a} \quad (a > 0) \quad (\text{Laplace})$$

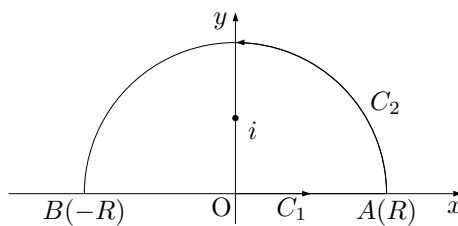
<解>

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$$

とおき, 右の積分経路を考える.

留数定理により,

$$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(i)$$



$$\text{Res}(i) = \frac{e^{i^2 a}}{2i} = \frac{e^{-a}}{2i}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} &= \int_{-R}^R \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt = \int_{-R}^0 \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt + \int_0^R \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt \\ &= \int_R^0 \frac{e^{-iau}}{1+u^2} d(-u) + \int_0^R \frac{e^{iat}}{1+t^2} dt = \int_0^R \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^R \frac{2 \cos at}{1+t^2} dt \rightarrow 2 \int_0^\infty \frac{2 \cos at}{1+t^2} dt \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

一方,

$$\left| \int_{C_2} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

以上により,

$$2 \int_0^\infty \frac{2 \cos at}{1+t^2} dt = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} e^{-a}$$

だから, 結論を得る. ■

10

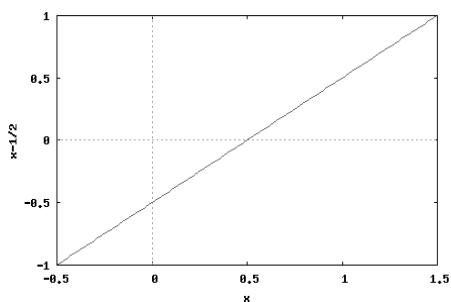
- (i) $n \geq 3$ が奇数なるとき, Bernoulli の多項式 $B_n(x)$ は $[0, 1]$ において, $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ においてのみ 0 となる.
- (ii) $n \geq 2$ が偶数のとき, $B_n(x)$ は $[0, 1]$ において, ちょうど二つの根 $x_0, 1 - x_0$ を有する.
- (iii) また, $n > 0$ のとき, $B_{2n+1}(x)$ は $(0, \frac{1}{2})$ において $B_{2n}(0)$ と同じ符号, $(\frac{1}{2}, 1)$ において反対の符号を有する.

<ヒント>

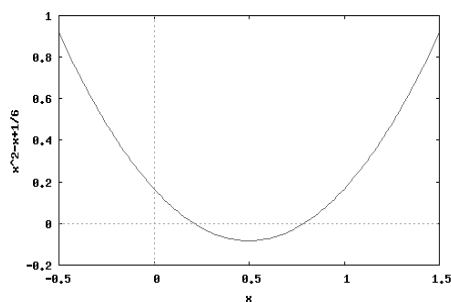
wxMaxima によれば, Bernoulli の多項式は “ $B_n(x) := \text{bernpoly}(x, n)$ ” で与えられる.

以下は, これらのグラフである.

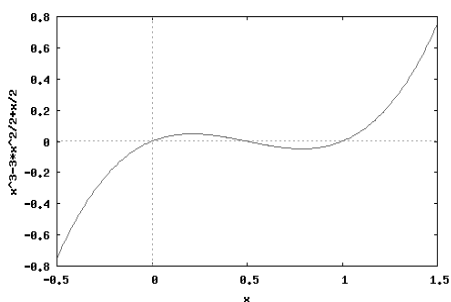
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$



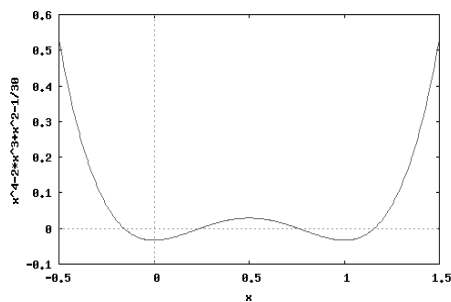
$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$



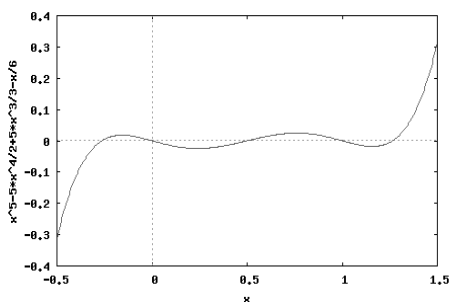
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}$$



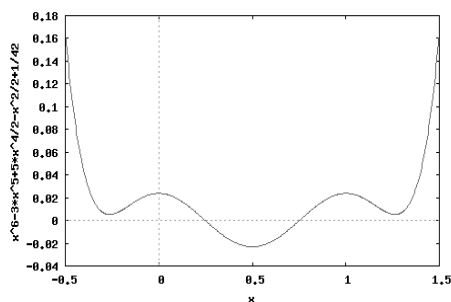
$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$



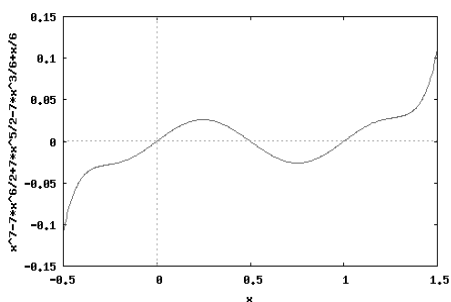
$$B_5(x) = x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6}$$



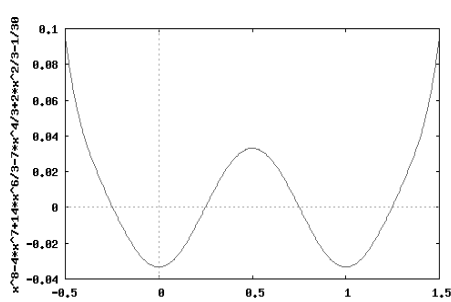
$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42}$$



$$B_7(x) = x^7 - \frac{7x^6}{2} + \frac{7x^5}{2} - \frac{7x^3}{6} + \frac{x}{6}$$



$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14x^6}{3} - \frac{7x^4}{3} + \frac{2x^2}{3} - \frac{1}{30}$$



<解>

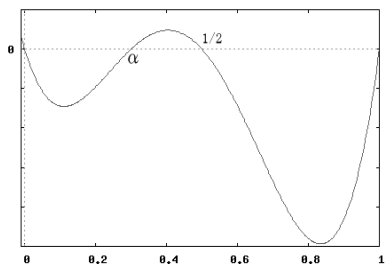
(i) $n \geq 3$ の奇数のとき, $B_n(x)$ の奇数の場合より $B_n(0) = 0$ である. また,

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x) \quad (92)$$

より, $B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = 0$, $B_n\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -B_n\left(\frac{1}{2}\right)$ から $B_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ よって,

$$B_n(0) = 0, B_n(1) = 0, B_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

を得る.



この他に解がないことを背理法で示す. もし他の解 α があれば, $0 < \alpha < 1, \alpha \neq \frac{1}{2}$ とすると, $B'_n(x) = 0$ は図から分かるように少なくとも 3 つの解を有する. このとき

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x) \quad (93)$$

であるから, $B_{n-1}(x) = 0$ は少なくとも 3 つの解があり, 従って $B_{n-2}(x) = 0$ は少なくとも 2 つの解がある.

ところが $n-2$ は奇数より $(0, \frac{1}{2})$ に, $\frac{1}{2}$ ともうひとつの解があることになる.

こうして, $B_{n-4}(x), B_{n-6}(x), \dots$ はいずれも $(0, \frac{1}{2})$ に, $\frac{1}{2}$ と他の解を持つことになるが, $B_3(x)$ は 3 次式であり, その解は $(0, \frac{1}{2})$ において $\frac{1}{2}$ だけであるので矛盾である.

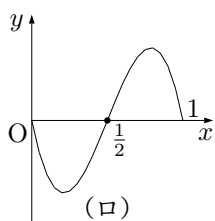
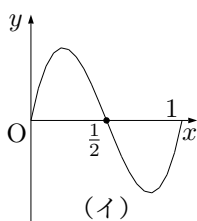
(ii) $n \geq 2$ のとき, k が奇数のとき $B_k(x) = 0$ は $[0, 1]$ でちょうど 3 つの解 $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ を持つ. よって (93) より $B_{k-1}(x) = 0$ は $(0, 1)$ で少なくとも 2 つの解を持つ. もし, この他の解を持てば (93) より $(0, 1)$ に少なくとも 2 つの解を持つことになり矛盾.

よって $B_{k-1}(x) = 0$ はちょうど 2 つの解を持つ. その 1 つを x_0 とすると, (92) より,

$$B_n(1-x_0) = (-1)^n B_n(x_0) = 0$$

すなわち, 他の 1 つの解は $1-x_0$ である.

(iii)



$B_{2n+1}(x)$ グラフは左図 (イ) (ロ) のいずれかである.

(イ) のとき $(0, \frac{1}{2})$ で $B_{2n+1}(x) > 0$ である. このとき $x = \frac{1}{2}$ の近傍で減少だから $B'_{2n+1}(\frac{1}{2}) < 0$ である.

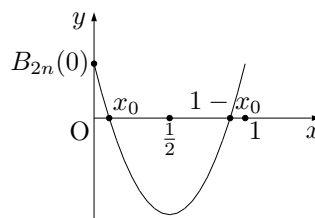
(93) より, $0 > B'_{2n+1}(\frac{1}{2}) = (2n+1)B_{2n}(\frac{1}{2})$

から $B_{2n}(\frac{1}{2}) < 0$ である.

(ii) から $B_{2n}(x) = 0$ は $(0, 1)$ で 2 つの解 $x_0, 1-x_0$ しか持たないので, 右図のような状況にしかない. つまり, $B_{2n}(0) > 0$ である.

これは, 前述の $B_{2n+1}(x) > 0$ に一致している. 勿論 $(\frac{1}{2}, 1)$ では符号は逆である.

(ロ) の場合も同様である. ■



11

$$\Gamma\left(\frac{s}{n}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{s+n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{s-\frac{1}{2}}} \Gamma(s) . \quad (\text{Gauss}) \quad (94)$$

<解>

$$f(s) := n^s \Gamma\left(\frac{s}{n}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{s+n-1}{n}\right) \quad (95)$$

とおく. $f(s)$ に $s+1$ を代入すると,

$$f(s+1) := n^{s+1} \Gamma\left(\frac{s+1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{s+2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{s+n}{n}\right)$$

従って,

$$\Gamma\left(\frac{s}{n}\right) f(s+1) = n \Gamma\left(\frac{s+n}{n}\right) f(s) .$$

更に $\Gamma(s+1) = \Gamma(s)$ から $\Gamma\left(\frac{s+n}{n}\right) = \frac{s}{n}\Gamma\left(\frac{s}{n}\right)$ だから, $f(s+1) = f(s)$ が成り立つ. また $s > 0$ のとき $f(s) > 0$ で,

$$\log f(s) = s \log n + \log \Gamma\left(\frac{s}{n}\right) + \log \Gamma\left(\frac{s+1}{n}\right) + \cdots + \log \Gamma\left(\frac{s+n-1}{n}\right)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \log f(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^2}{ds^2} \log \Gamma\left(\frac{s+i}{n}\right) \geq 0. \quad (96)$$

$f(s) > 0, f(s+1) = sf(s)$, (96) 及び “第3版 p.252 [注意]” から, $f(s) = a\Gamma(s)$ と書ける.

従って, (95) から $a = \sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$ を示せば証明したとなる.

$s=1$ を $f(s) = a\Gamma(s)$ に代入して,

$$a = f(1) = n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n}{n}\right)$$

$\Gamma(1) = 1$ を考慮して,

○ n が奇数のとき,

$$\begin{aligned} a = f(1) &= n \times \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \times \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \times \cdots \times \Gamma\left(\frac{\frac{n-1}{2}}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\frac{n+1}{2}}{n}\right) \\ &= n \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right) = n \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{k}{n}\right)} \quad (\odot \text{ p.252(7)}) \\ &= n\pi^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sin \pi\left(\frac{k}{n}\right)} \end{aligned}$$

○ n が偶数のとき,

$$\begin{aligned} a = f(1) &= n \times \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \times \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \times \cdots \times \Gamma\left(\frac{\frac{n}{2}-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\frac{n}{2}+1}{n}\right) \times \Gamma\left(\frac{\frac{n}{2}}{n}\right) \\ &= n\sqrt{\pi} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right) \quad (\odot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}) \\ &= n\sqrt{\pi} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{k}{n}\right)} = n\pi^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\sin \pi\left(\frac{k}{n}\right)} \end{aligned}$$

これらに

$$\begin{aligned} &\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \pi\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n \text{ is odd.}) \\ &= \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin \pi\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n \text{ is even.}) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2^{\frac{n-1}{2}}} \end{aligned}$$

を*25代入して, $a = \sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$ を得る.

*25 下記 $\odot$ 参照.

⊙ $\sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) = \sin \pi \left(1 - \frac{k}{n} \right)$ より,
 n が奇数のとき,

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \pi \left(1 - \frac{k}{n} \right) = \prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right).$$

右端の式は, 真ん中の式で $k \rightarrow n - k$ と置き換えたもの.
 これから,

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) \prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right)}.$$

同様に n が偶数の時,

$$\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin \pi \left(1 - \frac{k}{n} \right) = \prod_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right).$$

$\sin \pi \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} \right) = 1$ を考慮して,

$$\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) \prod_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) \cdot \sin \pi \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} \right)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right)}.$$

では, $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right)$ を求めよう.

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i} \left(\exp \left(i \frac{\pi}{n} k \right) - \exp \left(-i \frac{\pi}{n} k \right) \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{-\exp \left(-i \frac{\pi}{n} k \right)}{2i} \left(1 - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} k \right) \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} \exp \left(-i \cdot \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} k \right) \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} \exp \left(-i \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} k \right) \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} \cdot (-i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} k \right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} k \right) \right) \end{aligned}$$

$\exp \left(i \frac{2\pi}{n} k \right)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) と 1 とで 1 の n 乗根全体を成すので,

$$\begin{aligned} z^n - 1 &= (z - 1) (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) \\ &= (z - 1) \left(z - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} \right) \right) \left(z - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} \cdot 2 \right) \right) \dots \left(z - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} \cdot (n-1) \right) \right) \end{aligned}$$

従って,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} k \right) \right) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

ここに $z = 1$ を代入して,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(z - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} k \right) \right) = n$$

を得る. これを, $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \exp \left(i \frac{2\pi}{n} k \right) \right)$ へ代入して,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \pi \left(\frac{k}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

を得る. (q.e.d.) ■

12

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{n} \Gamma \left(\frac{m}{n} \right)}{\Gamma \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{2} \right)} \quad (m, n \text{ は正の整数}) \quad (97)$$

特に (練習問題 3 - (10) 参照),

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{\Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^2}{\sqrt{32\pi}} \quad , \quad \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4} \quad , \\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{\pi \sqrt{2\pi}}{\Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^2} \quad , \quad \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \quad . \end{aligned}$$

<解>

$$B \left(\frac{m}{n}, \frac{1}{2} \right) = \int_0^1 x^{\frac{m}{n}-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

において, $x = t^n$ とすると, $dx = nt^{n-1} dt$ から,

$$B \left(\frac{m}{n}, \frac{1}{2} \right) = \int_0^1 t^{m-n} (1-t^n)^{-\frac{1}{2}} \cdot nt^{n-1} dt = n \int_0^1 t^{m-1} (1-t^n)^{-\frac{1}{2}} dt$$

一方, $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ から,

$$B \left(\frac{m}{n}, \frac{1}{2} \right) = \frac{\Gamma \left(\frac{m}{n} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{2} \right)} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma \left(\frac{m}{n} \right)}{\Gamma \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{2} \right)}$$

以上より求める式を得る.

(94) において, $n = 4, s = 1$ とすると,

$$\Gamma \left(\frac{1}{4} \right) \Gamma \left(\frac{2}{4} \right) \Gamma \left(\frac{3}{4} \right) \Gamma \left(\frac{4}{4} \right) = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} \Gamma(1)$$

から, $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}\pi$ を得る.

- (97) において, $m = 1, n = 4$ として,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{32}\pi}.$$

- (97) において, $m = 2, n = 4$ として,

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{4}.$$

- (97) において, $m = 3, n = 4$ とし, $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}\pi$ 及び, $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ を用いて,

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi\sqrt{2}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}.$$

- (97) において, $m = 4, n = 4$ として,

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

■

13 C はオイラーの定数とする.

$$\Gamma'(1) + C = 0 \quad (98)$$

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} + C = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (99)$$

<解> (98) について

第三版 p.254-(16) 式において, $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{s} - C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right)$ より $s = 1$ とすれば,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} &= -\frac{1}{1} - C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= -1 - C + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right) \\ &= -1 - C + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= -1 - C + 1 = -C \end{aligned}$$

ここで $\Gamma(1) = 1$ より $\Gamma'(1) + C = 0$ を得る.

(99) について

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ より, $\Gamma'(s+1) = \Gamma(s) + s\Gamma'(s)$ だから,

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(n) + n\Gamma'(n)}{n\Gamma(n)} = \frac{1}{n} + \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$

がいえる.

よって (98) から $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C$ だから,

$$\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = 1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 1 - C$$

$$\frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2} + \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2} + 1 - C$$

$$\frac{\Gamma'(4)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{3} + \frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - C$$

$\vdots$

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{n-1} + \frac{\Gamma'(n-1)}{\Gamma(n-1)} = \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - C$$

$$\therefore \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} + C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \quad (\text{q.e.d.})$$

(99) について (別解)

第三版 p.254-(16) 式において, $\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = -\frac{1}{n} - C + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} \right)$ だから, これを直接計算すれば,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{1+n} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+n} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3+n} \right) + \cdots \right. \\ & \quad \left. \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1+n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+n} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+n} \right) + \cdots \right. \\ & \quad \left. \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m-1+n} \right) + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

により結論を得る. ■

14 $\mu(s)$ は §69 の通りとすれば,

$$\begin{cases} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s - \frac{1}{2s} + \mu'(s) \\ \mu'(s) = -\frac{B_1}{2s^2} + \frac{B_2}{4s^4} - \cdots + \theta \cdot \frac{(-1)^m B_m}{2ms^{2m}} \quad (0 < \theta < 1) \end{cases}$$

【注意】 C の計算

13 において, $\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$ を本問によって計算すれば, C が計算される.

今 $n = 10$ とすれば, $B_2 = \frac{1}{30}$ だから, $\mu'(s)$ の最初の一項だけを取って,

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9} - \log 10 + \frac{1}{20} + \frac{1}{1200} = 0.577216 \cdots$$

を得る.

<解>

p.259-(3) より,

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} \exp(-s + \mu(s))$$

において, $\log \Gamma(s) = \log \sqrt{2\pi} + \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s + (-s + \mu(s))$.

両辺を s で微分して,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + \left(s - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{s} - 1 + \mu'(s) = \log s - \frac{1}{2s} + \mu'(s)$$

また, p.261-(9) から,

$$\mu'(s) = -\frac{B_1}{2s^2} + \frac{B_2}{4s^4} - \cdots + \theta \cdot \frac{(-1)^n B_n}{2ns^{2n}} \quad (0 < \theta < 1) \quad .$$

【注意】 C の計算

$n = 10$ とすれば, 前問 -(2) より,

$$\frac{\Gamma'(10)}{\Gamma(10)} + C = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} .$$

一方, 上の結果により

$$\frac{\Gamma'(10)}{\Gamma(10)} = \log 10 - \frac{1}{20} + \mu'(10) .$$

$\mu'(10)$ については, 最初の一項だけをとって,

$$\mu'(10) = -\frac{B_1}{2 \times 10^2} = -\frac{\frac{1}{6}}{200} = -\frac{1}{1200} .$$

従って,

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9} - \log 10 + \frac{1}{20} + \frac{1}{1200} = 0.577216 .$$

を得る. ■

15 実軸上の区間 $[a, b]$ において $\varphi(x)$ が連続ならば, ζ を線分 ab 外の任意の複素数とすると,

$$f(\zeta) = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - \zeta} dx$$

は正則なる解析関数である (ζ に関する微分可能性!). 線分 ab の代わりに任意の曲線 C を取ってもよい.

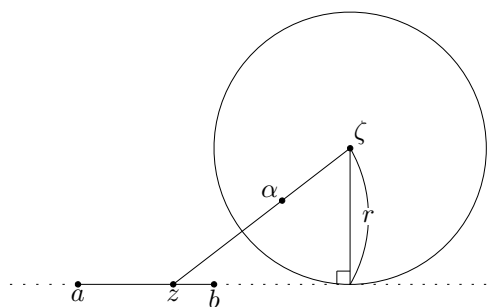
特に C が閉曲線ならば,

$$f(\zeta) = \int_C \frac{\varphi(z)}{z - \zeta} dz$$

は C 内および C 外において正則なる解析関数である.

[注意] それらは一般に別々の解析関数である. $\varphi(z)$ は C 上で連続であるだけで, **解析関数ではないから, これは Cauchy の積分公式とは違う.**

<解> 前半について



ζ から線分 ab への距離を r として, ζ を中心とし半径 r の円を

$$K : |z - \zeta| = r$$

とし, 円 K 内の点を α とする.

直線上の任意の点 z について, $k = \left| \frac{\alpha - \zeta}{z - \zeta} \right|$ とおくと,

$$k \leq \frac{|\alpha - \zeta|}{r} < 1 \text{ であるから,}$$

$$1 + \frac{\alpha - \zeta}{z - \zeta} + \left(\frac{\alpha - \zeta}{z - \zeta} \right)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{\alpha - \zeta}{z - \zeta}} = \frac{z - \zeta}{z - \alpha}.$$

従って,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(z)}{z - \zeta} &= \varphi(z) \cdot \frac{1}{z - \zeta} = \varphi(z) \left(\frac{z - \zeta}{z - \alpha} \cdot \frac{z - \alpha}{(z - \zeta)^2} \right) \\ &= \varphi(z) \left(\frac{z - \alpha}{(z - \zeta)^2} + \frac{z - \alpha}{(z - \zeta)^3} (\alpha - \zeta) + \frac{z - \alpha}{(z - \zeta)^4} (\alpha - \zeta)^2 + \cdots \right) \end{aligned}$$

これは線分 ab 上, 一様収束する.

線分 ab 上の $\left| \varphi(z) \cdot \frac{z - \alpha}{(z - \zeta)^2} \right|$ の最大値を M とすると,

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} \varphi(z) \frac{z - \alpha}{(z - \zeta)^{\nu+2}} (\alpha - \zeta)^{\nu} \right| \leq M \sum_{\nu=n}^{\infty} k^{\nu} = M \cdot \frac{k^n}{1 - k}$$

よって, $\int_a^b \frac{\varphi(z)}{z - \zeta} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \varphi(z) \frac{z - \alpha}{(z - \zeta)^{n+2}} dz \right) (\alpha - \zeta)^n$. 右辺は正則である. ■

後半について

任意の曲線 C で $f(\zeta) = \int_C \frac{\varphi(z)}{z - \zeta} dz$ が曲線外で解析的であることを示す.

まず,

$$f(\zeta + h) - f(\zeta) = \int_C \frac{h\varphi(z)}{(z - \zeta - h)(z - \zeta)} dz$$

なので,

$$\frac{f(\zeta + h) - f(\zeta)}{h} = \int_C \frac{\varphi(z)}{(z - \zeta - h)(z - \zeta)} dz$$

これを $A(h)$ とおく. このとき,

$$\lim_{h \rightarrow 0} A(h) = \int_C \frac{\varphi(z)}{(z - \zeta)^2} dz$$

を示す.

$$\begin{aligned} \left| A(h) - \int_C \frac{\varphi(z)}{(z - \zeta)^2} dz \right| &= \left| \int_C \frac{h\varphi(z)}{(z - \zeta - h)(z - \zeta)^2} dz \right| \\ &\leq |h| \int_C \frac{|\varphi(z)|}{|z - \zeta - h| \cdot |z - \zeta|^2} dz \end{aligned}$$

$\int_C \frac{|\varphi(z)|}{|z - \zeta - h| \cdot |z - \zeta|^2} dz$ は h が 0 の周りで有界なので題意は示された. ■

16 原点 O を中心とする半径 R の円周 C に関する Cauchy の積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - a}$$

を実数に引き直すために, $f(z) = u + vi$ と置いて, 極座標を用いる. すなわち C 上では $z = Re^{i\theta}$, また C 内の $a = re^{i\varphi}$ ($r < R$) とすれば,

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$$

$$v(r, \varphi) = v_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Rr \sin(\varphi - \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$$

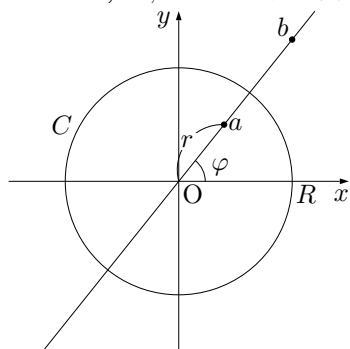
但し v_0 は原点における v の値である (Poisson).

<解> “反転” についての定義を確認する.

平面上の定円 O を中心とする半径 R の円を描いて, O から引いた任意の直線上に 2 点 P, P' を取って,

$$OP \cdot OP' = R^2$$

とすると, P, P' をこの円に関して互いに反転という.



円 C に関する反転を a, b とすると, $|a||b| = R^2$,
 $|a| = r$ だから $|b| = \frac{R^2}{r}$ である.

よって $b = \frac{R^2}{r} \exp(i\varphi)$ とおく.
 $|b| > R$ であるから b は円外の点である.

$\frac{f(z)}{z-b}$ は C およびその円の内部で正則だから, $\int_C \frac{f(z)}{z-b} dz = 0$.
 よって,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f(z)}{z-a} + \frac{f(z)}{z-b} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \cdot \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} dz.$$

$z = R \exp(i\theta)$ と, $ab = r \exp(i\varphi) \cdot \frac{R^2}{r} \exp(i\varphi) = R^2 \exp(i2\varphi)$ より,

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{(z-a)(z-b)} dz &= \frac{a-b}{z^2 - (a+b)z + ab} iR \exp(i\theta) d\theta \\ &= \frac{\left(r - \frac{R^2}{r}\right) \exp(i\varphi)}{R^2 \exp(2i\theta) - \left(r + \frac{R^2}{r}\right) \exp(i\varphi) R \exp(i\theta) + R^2 \exp(2i\varphi)} iR \exp(i\theta) d\theta \\ &= \frac{r^2 - R^2}{rR \exp((\theta - \varphi)i) - (r^2 + R^2) + rR \exp((\varphi - \theta)i)} i d\theta \\ &= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} i d\theta \end{aligned}$$

よって,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

$f(z) = u + iv$ とおくと,

$$f(a) = f(r, \varphi) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$$

であるから, 実部を比較して,

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

また, $f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z} dz$ より,

$$\begin{aligned} f(a) - f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \cdot \frac{z^2 - ab}{(z-a)(z-b)} \cdot \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(R \exp(i\theta)) \cdot \frac{R^2 \exp(2i\theta) - R^2 \exp(2i\varphi)}{R^2 \exp(2i\theta) - \left(r + \frac{R^2}{r}\right) \exp(i\varphi) R \exp(i\theta) + R^2 \exp(2i\varphi)} \cdot \frac{iz}{z} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R \exp(i\theta)) \cdot \frac{R(\exp((\theta - \varphi)i) - \exp((\varphi - \theta)i))}{R \exp((\theta - \varphi)i) - \left(r + \frac{R^2}{r}\right) + R \exp((\varphi - \theta)i)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R \exp(i\theta)) \cdot \frac{R(2i \sin(\theta - \varphi))}{2R \cos(\theta - \varphi) - \left(r + \frac{R^2}{r}\right)} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R \exp(i\theta)) \cdot \frac{iRr \sin(\varphi - \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta \end{aligned}$$

この虚部は,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \frac{Rr \sin(\varphi - \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

一方, $f(a) - f(0)$ の虚部は次の関数の虚部

$$u(r, \varphi) + iv(r, \varphi) - (u + iv \text{ の } (0, 0) \text{ における値})$$

即ち, $v(r, \varphi) - v_0$ であるから, これらを比較して,

$$v(r, \varphi) = v_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \theta) \frac{Rr \sin(\varphi - \theta)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta. \quad \blacksquare$$

17

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \quad (100)$$

係数 $P_n(x)$ は Legendre の級函数 (§36) である. 収束半径は $|x| \leq 1$ ならば 1 で, $|x| > 1$ ならば 1 よりも小さい. ただし平方根は $z=0$ するとき 1 なる枝を取るのである. また x は実数である.

<解> $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ の Taylor 展開を考える. $z^2 - 2xz + 1 = 0$ とおくと, $z = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$.

(i) $x^2 - 1 \leq 0$ のとき, 即ち $|x| \leq 1$ のとき.

$x = x \pm i\sqrt{1-x^2}$, このとき $|x|^2 = x^2 + (1-x^2) = 1 \therefore |z| = 1$. 従って, 収束半径は 1 である.

(ii) $|x| > 1$ のとき, 実数解 $x \pm \sqrt{x^2-1}$.

$x > 1$ であれば $0, x - \sqrt{x^2-1} < 1$, $x < -1$ であれば $-1 < x + \sqrt{x^2-1} < 0$ である.

従って, $|z| < 1$ なる解を持つので, 収束半径は 1 よりも小である.

(後半) (100) の両辺を z で微分して,

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x+2z}{(1-2xz+z^2)\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-2xz+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1}(1-2xz+z^2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)z^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (nP_n(x)z^{n-1} - 2nxP_n(x)z^n + nP_n(x)z^{n+1})$$

z^n の係数を比較して

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

$$\therefore (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

これは, p.121(7) に一致している. ■

18 Legendre の球函数^a $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ から Cauchy の積分公式^b によって,

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^2-1)^n dz}{2^n (z-x)^{n+1}}.$$

C は点 x を含む閉曲線である.

今 $-1 < x < 1$ として, x を中心とする半径 $\sqrt{1-x^2}$ の円を C とすれば,

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi \right)^n d\varphi \quad (\text{Legendre})$$

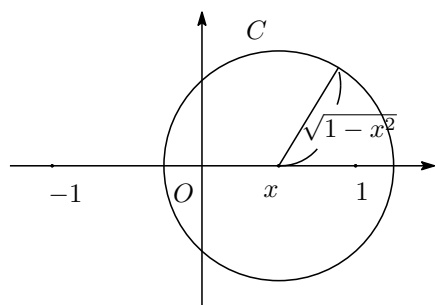
^a p.119-(1) より. ^b p.215-(4) から, $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$.

<解>

$f(z) = \frac{1}{n!2^n} (z^2-1)^n$ とおくと, $f^{(n)}(x) = P_n(x)$ である.

積分公式により,

$$P_n(x) = f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{1}{n!2^n} (z^2-1)^n \cdot \frac{dz}{(z-x)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{2^n \cdot (z-x)^{n+1}} dz. \quad (101)$$



$-1 < x < 1$ として, x を中心とする半径 $\sqrt{1-x^2}$ の円を C とすれば, $z = x + \sqrt{1-x^2} \exp(i\theta)$,
 $dz = i\sqrt{1-x^2} \exp(i\theta) d\theta = i(z-x)d\theta$.
 また, $\frac{z^2-1}{z-x} = z+x - \frac{1-x^2}{z-x}$ であるから,
 (101) を変形すると,

$$(101) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} i(z-x) d\theta = \frac{1}{2^{n+1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{z^2-1}{z-x} \right)^n d\theta \quad (102)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \frac{z^2-1}{z-x} &= z+x - \frac{1-x^2}{z-x} \\ &= z+x - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2} \exp(i\theta)} = 2x + \sqrt{1-x^2} \exp(i\theta) - \sqrt{1-x^2} \exp(-i\theta) \\ &= 2 \left(x + i\sqrt{1-x^2} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} (102) &= \frac{1}{2^{n+1}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2^n \left(x + i\sqrt{1-x^2} \sin \theta \right)^n d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \sin \theta \right)^n d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \sin \theta \right)^n d\theta \quad (\odot \text{ 三角関数の周期性より}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi \right)^n d\varphi \quad (\odot \varphi = \theta - \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi \right)^n d\varphi \quad (\odot \text{ 偶関数だから}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

19 Legendre の球函数 $P_n(x)$ ^aにおいて,

$$P_n(x) = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi)^{n+1}} \quad (\text{Laplace})$$

ここで $0 < |x| < 1$ で, 複号は x の正負に従う.

^a p.119-(1) より.

<解> $\alpha = x + i\sqrt{1-x^2}, \beta = x - i\sqrt{1-x^2}$ とする.

函数 $\frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}}$ は $z=0, \alpha, \beta$ を除く全平面 ($z=\infty$ も含めて) で正則である.

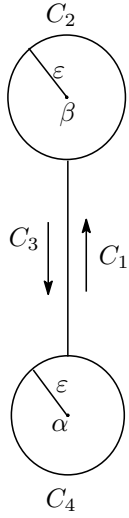
α と β を結ぶ線分 $\alpha\beta$ の近くを, 0 を含まないで反時計回りに回る閉曲線を C とすれば, C は 0 の周りを時計回りに回る閉曲線である.

従って, $-\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}}$ は $z=0$ での留週に等しい.

問題 **17** より, $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n$ なので, その留数は $P_n(x)$ そのものである.

⊙ z は $n+1$ 位の極であるが、その留数は

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^n}{dz^n} z^{n+1} \frac{1}{z^{n+1} \sqrt{1-2xz+z^2}} &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \\ &= \frac{1}{n!} \cdot n! \cdot P_n(x) \\ &= P_n(x) \end{aligned}$$



C は上の条件を満たす限り任意でよいので、左図のように点 α と点 β の周りを半径 ε の円で回る経路と出来る。

ここで $\sqrt{1-2xz+z^2}$ は線分 $\overline{\alpha\beta}$ の外側で正則になるように定義域を選んでおり、線分 $\overline{\alpha\beta}$ の右側と左側では (異なる分岐となり) 値が $\exp(-\pi i) = -1$ だけ値がう。

また、 C_2 と C_4 の積分で、被積分函数は $o(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ の大きさで、一方、小円の長さが $o(\varepsilon)$

なので、積分した値は $o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ となり、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、0 に近づく。

α と β を結ぶ線分上の点は $0 \leq t \leq 1$ を用いて、

$$\begin{aligned} (1-t)\alpha + t\beta &= (1-t) \left(x + i\sqrt{1-x^2} \right) + t \left(x - i\sqrt{1-x^2} \right) \\ &= x + i\sqrt{1-x^2}(1-2t) \end{aligned}$$

と表せる。

ここで、 $-1 \leq t \leq 1$ なのでこれを $\cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) とおく。

$z = x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi$ の変数変換を行う。

$$\begin{aligned} dz &= -i\sqrt{1-x^2} \sin \varphi d\varphi \\ 1-2xz+z^2 &= (1-x^2) \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \varphi \leq \pi$ のとき β から α へ向かうことに注意する。 $P_n(x)$ の計算では、 $z=0$ の時に 1 となる分岐を選んでいて、したがって原点 $z=0$ が線分 $\overline{\alpha\beta}$ の左側に位置するとき (すなわち $x > 0$ の時) には - となる。

ゆえに $\varepsilon \rightarrow 0$ をとると、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z^{n+1} \sqrt{1-2xz+z^2}} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot 2 \cdot \int_{C_3} \frac{dz}{z^{n+1} \sqrt{1-2xz+z^2}} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \mp 2i \cdot \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi)^{n+1}} \\ &= \pm \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d\varphi}{(x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi)^{n+1}} \\ & \quad (\text{複号は } x \text{ の正負と同順}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

20 $z = a$ が $f(z)$ の k 次の零点ならば, $z = a$ は $\frac{f'(z)}{f(z)}$ の一次の極で, 留数は k に等しい.
 $z = a$ が $f(z)$ の k 次の極でも, $z = a$ は $\frac{f'(z)}{f(z)}$ の一次の極であるが, 留数は $-k$ に等しい.

<解>

領域 K で, $f(z)$ について $a \in K$ が k 位の零点であれば,

$$f(z) = (z - a)^k f_k(z)$$

とできる. $f_k(z)$ は $z = a$ で解析的である. 両辺を z で微分して,

$$f'(z) = k(z - a)^{k-1} f_k(z) + (z - a)^k f'_k(z).$$

故に,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{f'_k(z)}{f_k(z)}.$$

$f_k(z)$ が解析的だから, $f'_k(z)$ も解析的であり, $z = a$ で $\frac{f'_k(z)}{f_k(z)}$ も解析的であるから, Cauchy の積分定理により, K 内で $\frac{f'_k(z)}{f_k(z)}$ が解析的である領域の任意の閉曲線 C に対し,

$$\int_C \frac{f'_k(z)}{f_k(z)} dz = 0.$$

従って,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_C \frac{k}{z - a} dz$$

となる.

C として, $|z - a| = r$ という円をとることが出来る. C は $z = a + \exp(i\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とパラメータ表示できて, $dz = i \exp(i\theta)$ だから,

$$\int_C \frac{k}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{k}{\exp(i\theta)} \cdot i \exp(i\theta) d\theta = k \cdot 2\pi i.$$

ここから,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k$$

とできる. 左辺は $z = a$ における留数の定義だから $\frac{f'(z)}{f(z)}$ の留数は k であることが示された.

極については, この議論で k を $-k$ で置き換えれば良く, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ の留数は $-k$ であることがわかる. ■

21 領域 K において $f(z)$ は一意的で, 極よりほかの特異点 (真性特異点) を持たないとき, $f(z)$ は K において**有理型** (meromorphic) であるという.

そのとき K 内の閉域において $f(z)$ の極の数は有限である. $f(z)$ が一定の値 c を取る点も同様である.

<解> $f(z)$ は極 a において

$$f(z) = (z - a)^{-k} (a_k + a_{k+1}(z - a) + \cdots) \quad (a_k \neq 0, k \geq 1)$$

と展開される.

$a_k \neq 0$ より $z = a$ の近傍では $(a_k + a_{k+1}(z-a) + \cdots)$ は 0 にならず、また a に十分近いところでは 0 でない有限の値に確定する。したがって $f(z)$ は a の近くでは a 以外では値が有限確定で極はない。

閉域内の無数の点は集積点をもつ。

したがって極は有限個である。

$f(z) - c$ の零点を a とする。 $f(z) - c$ は零点 a において

$$f(z) - c = (z - a)^k (a_k + a_{k+1}(z - a) + \cdots) \quad (a_k \neq 0, k \geq 1)$$

と展開される。

$a_k \neq 0$ より $z = a$ の近傍では $(a_k + a_{k+1}(z-a) + \cdots)$ は 0 にならない。

したがって $f(z)$ は a の近くでは a 以外では零点はない。

同様に零点は有限個である。 ■

22 単連結な領域 K において $f(z)$ は有理型で、 C は K 内で $f(z)$ の零点および極を通らない閉曲線とする。 然らば C の内部に含まれる $f(z)$ の零点および極の数（次数を計算に入れて）を n および p とすれば、

$$n - p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

に等しい。

即ち、 z が C 上を正の上向きに一周するとき、 $\log f(z)$ （任意の枝）の増加は $2(n - p)\pi i$ に等しい。

<解> **20** から C 内で a_i が k_i 次の零点なら、 $\exists C_1^i$ で、

$$k_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz .$$

また、 b_i が k'_i 次の極なら $\exists C_2^i$ で、

$$-k'_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

である。 除去可能特異点及び $\frac{f'(z)}{f(z)}$ が解析的である点では、 留数の値は 0 だから、 留数定理より、

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= 2\pi i \sum a_{-1} \\ &= 2\pi i \left(\sum_{i=1}^N k_i + \sum_{i=1}^{N'} (-k'_i) \right) . \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^N k_i$, $\sum_{i=1}^{N'} k'_i$ は各々次数を計算に入れた零点及び極の数だから、

$$\sum_{i=1}^N k_i = n , \quad \sum_{i=1}^{N'} (k'_i) = p$$

となる。 従って、

$$n - p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

が示された。 ■

23 $f(z), \varphi(z)$ は K において正則, C は前問と同様として, なお C 上で常に $|\varphi(z)| < |f(z)|$ とするならば, C の内部において

$$f(z) + \varphi(z) = 0$$

は $f(z) = 0$ と同様の根を有する. [Rouché の定理]

<解> **22** の式を,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = d \log f(z) = d \log |f(z)| + i d \arg f(z)$$

を用いて,

$$\int_C d \log f(z) = 0$$

より,

$$n - p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_C d \arg f(z)$$

という形に書き直しておく. さて,

$$\arg(f(z) + \varphi(z)) = \arg f(z) + \arg \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right).$$

ここで, $w = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ とすると, $|\varphi(z)| < |f(z)|$ であるから, w による像曲線は $|w - 1| < 1$ に含まれるから, 原点を回ることはない.

従って,

$$\int_C d \arg \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) = 0$$

となり,

$$\int_C d \arg(f(z) + \varphi(z)) = \int_C d \arg f(z)$$

と, 言える.

従って, (103) から, $f(z) + \varphi(z), f(z)$ の零点, 極の個数を各々 n_1, n_2, p_1, p_2 とすれば,

$$n_1 - p_1 = n_2 - p_2.$$

$f(z), \varphi(z)$ は共に C 内で正則だから, $p_1 = p_2 = 0$ であって, $n_1 = n_2$.

即ち, $f(z) + \varphi(z), f(z)$ は同数の根を持つ. よって “Rouché の定理” が示された. ■

第6章・章末問題と解答

1 区間 $[0, 1]$ において Bernoulli の多項式を Fourier 級数に展開すれば,

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1} 2(2n)! \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\pi\nu)^{2n}}$$

$$B_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2(2n+1)! \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\nu x}{(2\pi\nu)^{2n+1}}$$

<解>

$$B_n(x) \sim \frac{a_0(n)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu}(n) \cos(2\pi\nu x) + b_{\nu}(n) \sin(2\pi\nu x)) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

と表す. 以下 $\nu \geq 1$ とする.

$$\begin{aligned} a_{\nu}(n) &= 2 \int_0^1 B_n(t) \cos(2\pi\nu t) dt \\ &= \left[\frac{2}{2\pi\nu} B_n(t) \sin(2\pi\nu t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{2\pi\nu} B'_n(t) \sin(2\pi\nu t) dt \\ &= - \int_0^1 \frac{1}{\pi\nu} n B_{n-1}(t) \sin(2\pi\nu t) dt \quad (\odot \text{ §64-(15)}) \\ &= - \frac{n}{2\pi\nu} b_{\nu}(n-1) . \\ b_{\nu}(n) &= 2 \int_0^1 B_n(t) \sin(2\pi\nu t) dt \\ &= \left[- \frac{2}{2\pi\nu} B_n(t) \cos(2\pi\nu t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2}{2\pi\nu} B'_n(t) \cos(2\pi\nu t) dt \\ &= - \frac{1}{\pi\nu} (B_n(1) - B_n(0)) + \int_0^1 \frac{1}{\pi\nu} n B_{n-1}(t) \cos(2\pi\nu t) dt \quad (\odot \text{ §64-(15)}) \\ &= \frac{n}{2\pi\nu} a_{\nu}(n-1) \quad (\odot \text{ §64-(14) 及び } B_{n-1}(x) \text{ の展開式の定義}) . \end{aligned}$$

i を虚数単位として,

$$\begin{aligned} a_{\nu}(n) + ib_{\nu}(n) &= \frac{in}{2\pi\nu} (a_{\nu}(n-1) + ib_{\nu}(n-1)) = \left(\frac{i}{2\pi\nu} \right)^{n-1} n! (a_{\nu}(1) + ib_{\nu}(1)) . \\ a_{\nu}(1) &= 2 \int_0^1 B_1(t) \cos(2\pi\nu t) dt = 2 \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) \cos(2\pi\nu t) dt \\ &= 2(-1)^{\nu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \cos(2\pi\nu x) dx = 0 . \\ b_{\nu}(1) &= 2 \int_0^1 B_1(t) \sin(2\pi\nu t) dt = 2 \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) \sin(2\pi\nu t) dt \\ &= 2(-1)^{\nu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \sin(2\pi\nu x) dx = 4(-1)^{\nu} \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin(2\pi\nu x) dx . \end{aligned}$$

更に,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin(2\pi\nu x) dx &= \left[-\frac{1}{2\pi\nu} x \cos(2\pi\nu x) \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^1 \cos(2\pi\nu x) dx \\
&= -\frac{1}{4\pi\nu} (-1)^\nu + \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^1 \cos(2\pi\nu x) dx \\
&= \frac{1}{4\pi\nu} (-1)^{\nu+1}
\end{aligned}$$

だから,

$$b_\nu(1) = 4(-1)^\nu \cdot \frac{1}{4\pi\nu} (-1)^{\nu+1} = -\frac{1}{\pi\nu} .$$

即ち,

$$\begin{aligned}
a_\nu(n) + ib_\nu(n) &= \left(\frac{i}{2\pi\nu} \right)^{n-1} \cdot n! \cdot i \cdot \frac{1}{\pi\nu} = -2 \left(\frac{i}{2\pi\nu} \right)^n \cdot n! . \\
a_\nu(2n) + ib_\nu(2n) &= -2 \left(\frac{i}{2\pi\nu} \right)^{2n} \cdot (2n)! = (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (2n)! \cdot \frac{1}{(2\pi\nu)^{2n}} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_\nu(2n+1) + ib_\nu(2n+1) &= -2 \left(\frac{i}{2\pi\nu} \right)^{2n+1} \cdot (2n+1)! \\
&= -\frac{1}{i} \cdot (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (2n+1)! \cdot \frac{1}{(2\pi\nu)^{2n+1}} \\
&= i \cdot (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (2n+1)! \cdot \frac{1}{(2\pi\nu)^{2n+1}} .
\end{aligned}$$

以上より,

$$a_\nu(n) = (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (2n)! \cdot \frac{1}{(2\pi\nu)^{2n}} \quad (103)$$

$$b_\nu(n) = 0 \quad (104)$$

$$a_\nu(2n+1) = 0 \quad (105)$$

$$b_\nu(2n+1) = (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (2n+1)! \cdot \frac{1}{(2\pi\nu)^{2n+1}} \quad (106)$$

ところで,

$$\begin{aligned}
a_0(n) &= 2 \int_0^1 B_n(t) dt \\
&= 2 \int_0^1 \frac{B'_n(t)}{n+1} \quad (\textcircled{C} \textcircled{§} 64 - (15)) \\
&= \frac{2}{n+1} \left[B_{n+1}(t) \right]_0^1 = \frac{2}{n+1} (B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)) \\
&= 0 \quad (\textcircled{C} \textcircled{§} 64 - (14) \text{ 直後の式})
\end{aligned}$$

$$\therefore a_0(n) = 0 \quad (107)$$

以上の (103) (104) (105) (106) (107) の式を最初の

$$B_n(x) \sim \frac{a_0(n)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu(n) \cos(2\pi\nu x) + b_\nu(n) \sin(2\pi\nu x)) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

へ代入すれば結論を得る。 ■

2 $f(x)$ は連続で, $\int_a^b x^n f(x) dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ ならば, $[a, b]$ において $f(x) \equiv 0$.

<解> 定理 67 より, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, x についての多項式 $P(x)$ が存在して,

$$|f(x) - P(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}} \quad (a \leq x \leq b) \quad .$$

また仮定により

$$\int_a^b f(x)P(x) dx = 0 \quad .$$

これらにより,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x))^2 dx &\leq \int_a^b (f(x))^2 dx + \int_a^b (P(x))^2 dx = \int_a^b (f(x) - P(x))^2 dx + 2 \int_a^b f(x)P(x) dx \\ &< (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} + 0 = \varepsilon . \end{aligned}$$

$$\therefore 0 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx < \varepsilon .$$

よって $\int_a^b (f(x))^2 dx = 0$ を得る.

$\exists c \in [a, b]$ s.t. $(f(c))^2 > 0$ ならば, $\int_a^b (f(x))^2 dx > 0$ となるので矛盾.

$$\therefore f(x) \equiv 0 \quad \text{for } \forall x \in [a, b] . \quad \blacksquare$$

3 $f(x) = e^{-|x|}$ に Fourier の積分公式を適用すれば,

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$

<解> Fourier の積分公式は定理 70 より,

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t-x) dt .$$

$f(x)$ が連続ならば $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ だから,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t-x) dt . \quad (108)$$

と書いて, されにこの右辺の積分において,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t-x) dt &= \int_{-\infty}^\infty f(t) (\cos ut \cos ux + \sin ut \sin ux) dt \\ &= \cos ux \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut dt + \sin ux \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut dt \end{aligned}$$

ここで $\cos ut$ は偶関数, $\sin ut$ は奇関数で, “偶関数 $\times$ 偶関数 = 偶関数”, “奇関数 $\times$ 偶関数 = 奇関数” になるから, 特に $f(t)$ が偶関数の時 $f(t) \cos ut$ は偶関数, $f(t) \sin ux$ は奇関数になり, さらに奇関数の $(-\infty, +\infty)$ での積分は 0 で, 偶関数の $(-\infty, +\infty)$ での積分は $(0, +\infty)$ での積分の 2 倍になるから,

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t-x) dt = \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut dt = 2 \cos ux \int_0^\infty f(t) \cos ut dt .$$

よって $f(x)$ が偶関数のとき, (108) は

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ux \, du \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \quad (109)$$

と書ける.

$f(x) = e^{-|x|}$ は連続な偶関数だから, (109) が適用できて, $[0, +\infty)$ では $f(x) = e^{-x}$ だから,

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ux \, du \int_0^\infty e^{-t} \cos ut \, dt . \quad (110)$$

右辺の積分のうち, $\int_0^\infty e^{-t} \cos ut \, dt$ の部分について,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-t} \cos ut \, dt &= \left[e^{-t} \frac{1}{u} \sin ut \right]_0^\infty + \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-t} \sin ut \, dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t} \frac{1}{u} \sin ut \right) - \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{-t} \frac{1}{u} \sin ut \right) \\ &\quad + \frac{1}{u} \left[e^{-t} \left(-\frac{1}{u} \cos ut \right) \right]_0^\infty + \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-t} \left(-\frac{1}{u} \cos ut \right) dt \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{u} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-e^{-t} \frac{1}{u} \cos ut \right) - \lim_{t \rightarrow 0} \left(-e^{-t} \frac{1}{u} \cos ut \right) \right) - \frac{1}{u^2} \int_0^\infty e^{-t} \cos ut \, dt \\ &= \frac{1}{u} \left(0 - \left(-\frac{1}{u} \right) \right) - \frac{1}{u^2} \int_0^\infty e^{-t} \cos ut \, dt = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2} \int_0^\infty e^{-t} \cos ut \, dt . \\ &\therefore \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) \int_0^\infty e^{-t} \cos ut \, dt = \frac{1}{u^2} . \\ &\therefore \int_0^\infty e^{-t} \cos ut \, dt = \frac{1}{1 + u^2} . \end{aligned}$$

だから, (110) は,

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos ux}{1 + u^2} \, du \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos ux}{1 + u^2} \, du = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} .$$

ここで x を α , u を x と書き直せば結論を得る. ■

第7章・章末問題と解答

1 定理 72 の場合に於いて,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

を求めること.

<解>

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}. \quad (111)$$

より,

$$F_x + \frac{\partial z}{\partial x} F_z = 0. \quad (112)$$

(112) の両辺を x で微分^{*26}する.

$$F_{xx} + \frac{\partial z}{\partial x} F_{xz} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} F_z + \frac{\partial z}{\partial x} \left(F_{xz} + \frac{\partial z}{\partial x} F_{zz} \right) = 0.$$

ここへ (111) を代入すると,

$$F_{xx} - \frac{F_x}{F_z} F_{xz} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} F_z - \frac{F_x}{F_z} F_{xz} + \left(-\frac{F_x}{F_z} \right)^2 F_{zz} = 0.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{F_{xx}}{F_z} + \frac{2F_x F_{xz}}{F_z^2} - \frac{F_x^2 F_{zz}}{F_z^3}.$$

(112) の両辺を y で微分

$$F_{xy} + \frac{\partial z}{\partial y} F_{xz} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} F_z + \frac{\partial z}{\partial x} \left(F_{yz} + \frac{\partial z}{\partial y} F_{zz} \right) = 0.$$

ここへ (111) と $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ を代入すると,

$$F_{xy} - \frac{F_y}{F_z} F_{xz} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} F_z - \frac{F_x}{F_z} \left(F_{yz} - \frac{F_y}{F_z} F_{zz} \right) = 0.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{F_{xy}}{F_z} + \frac{F_x F_{yz} + F_y F_{xz}}{F_z^2} - \frac{F_x F_y F_{zz}}{F_z^3}.$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ についても同様に,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{F_{yy}}{F_z} + \frac{2F_y F_{yz}}{F_z^2} - \frac{F_y^2 F_{zz}}{F_z^3} \text{.を得る.} \blacksquare$$

^{*26} 全微分の公式から $dF_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx + \frac{\partial F_x}{\partial z} dz$ となっていることに注意せよ!

2 $x, y; u, v$ の間に二つの関係式が与えられて, x, y が u, v の函数として, また u, v が x, y の函数として定められるときは,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} &= 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial v} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = 1. \end{aligned}$$

<解> x, y が u, v の函数として定められるのだから,

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{cases} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

u, v が x, y の函数として定められるのだから,

$$\begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{cases} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

以上より,

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

だから,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る. ■

3 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m)$ が $x_1, x_2, \dots, x_n$ に関しては同次二次式なるとき,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

として, $x_1, x_2, \dots, x_n$ の代わりに $p_1, p_2, \dots, p_n$ を独立変数として,

$$\varphi(x, u) = \psi(p, u)$$

とすれば,

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_i} = x_i, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

<解>*27

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad {}^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

2 次形式を $\varphi(x, u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u)x_i x_j$ で表す.

$a_{ij} \neq a_{ji}$ の場合には $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ を新たに $a_{ij} = a_{ji}$ と置き換え,

$$\varphi(x, u) = {}^t x A x \quad (113)$$

$${}^t A = A. \quad (114)$$

と仮定して良い.

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{より,}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = 2a_{ij}. \quad (115)$$

$$p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{と置くと,}$$

$$p = 2Ax \quad (116)$$

特に A は正則であると仮定したから,

$$x = \frac{1}{2} A^{-1} p. \quad (117)$$

更に $\psi(p, u)$ を以下のように定義する.

$$\psi(p, u) = \varphi(x(p), u). \quad (118)$$

(117) を (118) へ代入して, (114) を用いると,

$$\psi(p, u) = \frac{1}{4} {}^t p A^{-1} p \quad (119)$$

を得る.

(115) により,

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^n a_{ji} \frac{\partial \psi}{\partial p_j}$$

即ち,

$$p = 2A \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \end{pmatrix}. \quad (120)$$

*27 以下 A は正則であることを前提としている.

(117) (120) より,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} A^{-1} p = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

から, 結論の第 1 式

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_i} = x_i \quad \text{を得る.}$$

次に (113) から

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = {}^t x \frac{\partial A}{\partial u_i} x. \quad (121)$$

同じく, (119) により,

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_i} = \frac{1}{4} {}^t p \frac{\partial A^{-1}}{\partial u_i} p \quad (122)$$

$AA^{-1} = E$ の両辺を u_i で微分して, $\frac{\partial A}{\partial u_i} A^{-1} + A \frac{\partial A^{-1}}{\partial u_i} = O$ から,

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial u_i} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u_i} A^{-1}. \quad (123)$$

(123) を (122) へ代入して (116) を考慮すると,

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_i} = -{}^t x \frac{\partial A}{\partial u_i} x \quad (124)$$

を得る. (121) と (124) を比較して,

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \quad \text{を得る.} \quad \blacksquare$$

4 z が x, y の関数なるとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

と書く. 今独立変数として p, q を取り

$$Z = px + qy - z$$

を p, q の関数とみて

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial p^2} = R, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial p \partial q} = S, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial q^2} = T$$

と書くならば

$$dZ = xdp + ydq,$$

(すなわち $\frac{\partial Z}{\partial p} = x, \quad \frac{\partial Z}{\partial q} = y$). また,

$$\frac{R}{t} = \frac{S}{-s} = \frac{T}{r} = \frac{1}{h}, \quad (h = rt - s^2). \quad (\text{Legendre の変換})$$

<解> Z を p, q の関数とみなすと $Z(p, q) = p \cdot x(p, q) + q \cdot y(p, q) - z$ より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial p} &= x + p \frac{\partial x}{\partial p} + q \frac{\partial y}{\partial p} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} \right) \\ &= x + p \frac{\partial x}{\partial p} + q \frac{\partial y}{\partial p} - \left(p \frac{\partial x}{\partial p} + q \frac{\partial y}{\partial p} \right) \\ &= x .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial q} &= y + p \frac{\partial x}{\partial q} + q \frac{\partial y}{\partial q} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q} \right) \\ &= y + p \frac{\partial x}{\partial q} + q \frac{\partial y}{\partial q} - \left(p \frac{\partial x}{\partial q} + q \frac{\partial y}{\partial q} \right) \\ &= y .\end{aligned}$$

即ち,

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial p} dp + \frac{\partial Z}{\partial q} dq = xdp + ydq .$$

かつ,

$$R = \frac{\partial^2 Z}{\partial p^2} = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad S = \frac{\partial^2 Z}{\partial p \partial q} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad S = \frac{\partial^2 Z}{\partial q \partial p} = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad T = \frac{\partial^2 Z}{\partial q^2} = \frac{\partial y}{\partial q}$$

一方,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = s, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

$p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$ かつ, $x = x(p, q)$, $y = y(p, q)$ と表されるから, 本章-問題 2 により,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{即ち,} \quad \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

よって,

$$\begin{pmatrix} R & S \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{rt - s^2} \begin{pmatrix} t & -s \\ -s & r \end{pmatrix} .$$

から, 結論を得る. ■

5 V を x, y, z の関数として,

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

と置く. 今直角座標を (x, y, z) から (X, Y, Z) に変換すれば,

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)^2, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} .$$

<解> 計算を簡略化するために, x, y, z を x_1, x_2, x_3 , X, Y, Z を X_1, X_2, X_3 で表す.

x_1, x_2, x_3 と X_1, X_2, X_3 の関係が直角座標の変換であれば, 3 次の直交行列 $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ が存在して,

$$X = Px \quad \text{即ち,} \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad {}^t P P = P {}^t P = E .$$

つまり,

$$\sum_{i=1}^3 p_{ji} p_{ki} = \delta_{jk} \quad , \quad \sum_{i=1}^3 p_{ij} p_{ik} = \delta_{jk} \quad .$$

$X = Px$ から $\frac{\partial X_j}{\partial x_i} = p_{ji}$. 以上から,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial V}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 p_{ji} \frac{\partial V}{\partial X_j} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 p_{ji} \frac{\partial V}{\partial X_j} \sum_{k=1}^3 p_{ki} \frac{\partial V}{\partial X_k} \right) = \sum_{j,k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 p_{ji} p_{ki} \right) \frac{\partial V}{\partial X_j} \frac{\partial V}{\partial X_k} \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \delta_{jk} \frac{\partial V}{\partial X_j} \frac{\partial V}{\partial X_k} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial V}{\partial X_j} \right)^2 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial V}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial V}{\partial X_i} p_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ji} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial X_k \partial X_j} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{ji} p_{ki} \frac{\partial^2 V}{\partial X_k \partial X_j} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 p_{ji} p_{ki} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial X_k \partial X_j} \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{jk} \frac{\partial^2 V}{\partial X_k \partial X_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial X_j^2} . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

[6] 領域 K において連続的微分可能な函数 $f(x, y)$ が, $x + ay$ のみの函数なるために必要かつ十分なる条件は $f_y = af_x$ である (a は定数).

<解> $(\Rightarrow)$ $f(x, y) = g(x + ay)$ で表されたとする.

$f_x = g'(x + ay)$, $f_y = ag'(x + ay)$ であるから, $f_y = ag'(x + ay) = af_x$ を得る.

$(\Leftarrow)$ $p_0 = (x_0, y_0)$ において $f_y = af_x$ が成立すると仮定する.

$u = f(x, y)$, $v = x + ay$ とする. $p_0 = (x_0, y_0)$ の近傍で,

$$\begin{aligned} \frac{D(u, v)}{D(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ 1 & a \end{vmatrix} = af_x - f_y = 0 \\ \frac{D(v)}{D(x)} &= \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \neq 0 . \end{aligned}$$

定理 75 より $p_0 = (x_0, y_0)$ の近傍で u は v の函数として表すことが出来る.

即ち, $u = u(v) = u(x + ay)$, 言い換えれば $f(x, y) = u(x + ay)$ で表すことが出来る. $\blacksquare$

7 楕円体の中心の通る截（切）面の主軸を極値として求めること。

<解> 楕円体と截面を直角座標で

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$lx + my + nz = 0, \quad (l^2 + m^2 + n^2 = 1)$$

として $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ の極値を求める。

$a = b = c$ の場合は自明な解 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ を得る。

以下 a, b, c は全てが等しくはないものと仮定する。

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \quad (125)$$

$$\varphi_2(x, y, z) = lx + my + nz \quad (126)$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (127)$$

と置く。

点 $P = (x, y, z)$ が極値を与える場合には

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, f)}{D(x, y, z)} = 0 \quad (128)$$

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} \neq 0 \quad (129)$$

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(y, z)} \neq 0 \quad (130)$$

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(z, x)} \neq 0 \quad (131)$$

が成立する。

以下、計算を簡略化するために

$$\vec{l} = (l, m, n) \quad (132)$$

$$\vec{x} = (x, y, z) \quad (133)$$

$$\vec{X} = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right) \quad (134)$$

とする。(128) について

$$\begin{aligned} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, f)}{D(x, y, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2\vec{X} \\ \vec{l} \\ 2\vec{x} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} \vec{X} \\ \vec{l} \\ \vec{x} \end{vmatrix} \\ &= 4 \left(\vec{X} \times \vec{l} \right) \cdot \vec{x} = 4 \left(\vec{l} \times \vec{x} \right) \cdot \vec{X} = 4 \left(\vec{x} \times \vec{X} \right) \cdot \vec{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} &= \frac{2x}{a^2}m - \frac{2y}{b^2}l \\ \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(y, z)} &= \frac{2y}{b^2}n - \frac{2z}{c^2}m \\ \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(z, x)} &= \frac{2z}{c^2}l - \frac{2x}{a^2}n\end{aligned}$$

よって (128) と (129) (130) (131) は,

$$(\vec{X} \times \vec{l}) \cdot \vec{x} = (\vec{l} \times \vec{x}) \cdot \vec{X} = (\vec{x} \times \vec{X}) \cdot \vec{l} = 0 \quad (135)$$

$$\vec{X} \times \vec{l} \neq \vec{0} \quad (136)$$

ところで

$$|\vec{l}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1 \quad (137)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{X} = 1 \quad (138)$$

$$\vec{l} \cdot \vec{x} = 0 \quad (139)$$

(135) の $(\vec{l} \times \vec{x}) \cdot \vec{X} = 0$ 及び (133) より $\vec{X}$ は $\vec{x}$, $\vec{l}$ の 1 次結合で表される.

$$\vec{X} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{l} \quad (140)$$

よって,

$$1 = \vec{x} \cdot \vec{X} = \alpha \vec{x} \cdot \vec{x} + \beta \vec{l} \cdot \vec{x} = \alpha r^2 \quad (\odot \quad (133)) \quad (141)$$

かつ

$$\alpha \neq 0, \quad r \neq 0 \quad (142)$$

以下, (140) を成分表示し, $\alpha = \frac{1}{r^2}$ を代入する.

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right)x = \beta l, \quad \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right)y = \beta m, \quad \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right)z = \beta n \quad (143)$$

$$(144)$$

即ち $\beta \neq 0$ である.

(143) を整理して,

$$\begin{aligned}& (\text{第 1 式}) \times a^2 \times r^2 \times (r^2 - b^2) \times (r^2 - c^2) \times l \\ & + (\text{第 2 式}) \times b^2 \times r^2 \times (r^2 - c^2) \times (r^2 - a^2) \times m \\ & + (\text{第 3 式}) \times c^2 \times r^2 \times (r^2 - a^2) \times (r^2 - b^2) \times n\end{aligned}$$

を計算する.

$$(\text{左辺}) = (r^2 - a^2) \times (r^2 - b^2) \times (r^2 - c^2) \times (lx + my + nz) = 0$$

$$(\text{右辺}) = \beta r^2 \times \left((r^2 - b^2) \times (r^2 - c^2) (la)^2 + (r^2 - c^2) \times (r^2 - a^2) (mb)^2 + (r^2 - a^2) \times (r^2 - b^2) (nc)^2 \right)$$

よって $\beta = 0$ 又は

$$(r^2 - b^2) \times (r^2 - c^2) (la)^2 + (r^2 - c^2) \times (r^2 - a^2) (mb)^2 + (r^2 - a^2) \times (r^2 - b^2) (nc)^2 = 0. \quad (145)$$

以下 $a \geq b \geq c$ と仮定しても一般性は失われないので、この事を仮定する.

$$g(t) = (t - b^2) \times (t - c^2) (la)^2 + (t - c^2) \times (t - a^2) (mb)^2 + (t - a^2) \times (t - b^2) (nc)^2 \text{ と置く.}$$

○ $a = b = c$ の時. $\exists t = a^2$ だけ $g(t) = 0$ が成立する.

以下の場合には形式上 (145) を満足する.

○ $\beta = 0$ の場合.

(143) の 3 つの式のそれぞれを自乗して和を取る.

$$\left(\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) x \right)^2 + \left(\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) y \right)^2 + \left(\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) z \right)^2 = \beta^2$$

$a \geq b \geq c$ かつ a, b, c は全てが等しくないという仮定より, $a = b = r, z = 0$ 又は $x = 0, b = c = r$.

(i) $a = b = r, z = 0$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{0}{c^2} = 1 \text{ かつ } \frac{x^2 + y^2 + 0^2}{a^2} = 1$$

(ii) $x = 0, b = c = r$

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \text{ かつ } \frac{0^2 + y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

以上により, 極値を与える点は (145) を満たす r から求まる (125) = 0, (126) = 0, (127) = r^2 を満たす (x, y, z) である. ■

第8章・章末問題と解答

1 半径 a の二つの直円筒の軸が交わって角 ω をなすとき、両方に共通な体積は $\frac{16}{3} \cdot \frac{a^3}{\sin \omega}$ である。

<解1> x, y, z 空間で、

$$\text{直円筒 1} : x^2 + y^2 \leq a^2$$

とおく。

更に直円筒 2 は、 yz 平面上で直円筒 1 の原点を固定し、時計回りに角 ω だけ回転させる ($0 < \omega < \pi$) とする。

直円筒 1 の点 (x, y, z) が回転によって直円筒 2 に移る点を (X, Y, Z) とすると、

$$\text{直円筒 2} : X^2 + Y^2 \leq a^2$$

更に $i = \sqrt{-1}$ として、

$$\begin{cases} X = x \\ (Y + iZ) e^{i\omega} = y + iz \end{cases} \quad \text{が成立する.}$$

従って、

$$Y = y \cos \omega + z \sin \omega, \quad Z = -y \sin \omega + z \cos \omega.$$

直円筒 1, 2 の共通部分の区域 K は

$$K : x^2 + y^2 \leq a^2, \quad x^2 + (y \cos \omega + z \sin \omega)^2 \leq a^2 \quad \text{である.}$$

この区域の体積を V とすると、

$$V = \int_K dw = \int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} dxdy \int_{\frac{-y \cos \omega + \sqrt{a^2 - x^2}}{\sin \omega}}^{\frac{-y \cos \omega + \sqrt{a^2 - x^2}}{\sin \omega}} dz = \frac{2}{\sin \omega} \int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2} dxdy.$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置くと、 $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = r$. 従って、

$$\int \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta} dr$$

θ を固定して、 $u(r) = \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta}$ とおくと、 $u^2 = a^2 - r^2 \cos^2 \theta$, $r \frac{dr}{du} = -\frac{u}{\cos^2 \theta}$.

$$\int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta} dr = \int_a^{a|\sin \theta|} u \cdot \left(-\frac{u}{\cos^2 \theta}\right) du = \int_{a|\sin \theta|}^a \frac{u^2}{\cos^2 \theta} du = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{1 - |\sin \theta|^3}{\cos^2 \theta}.$$

$$\therefore V = \frac{2a^3}{3 \sin \omega} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\sin \theta|^3}{\cos^2 \theta} d\theta$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\sin \theta|^3}{\cos^2 \theta} d\theta &= \int_0^\pi \frac{1 - \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{1 + \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \left[\frac{-\cos^2 \theta + \sin \theta - 1}{\cos \theta} \right]_0^\pi + \left[\frac{\cos^2 \theta + \sin \theta + 1}{\cos \theta} \right]_\pi^{2\pi} = 4 + 4 = 8. \end{aligned}$$

$$\therefore V = \frac{2a^3}{3 \sin \omega} \cdot 8 = \frac{16a^3}{3 \sin \omega}. \quad \blacksquare$$

<解 2> *28 2本の直円筒の共通部分から四分の一を切り出すと図1のような図形が得られる。

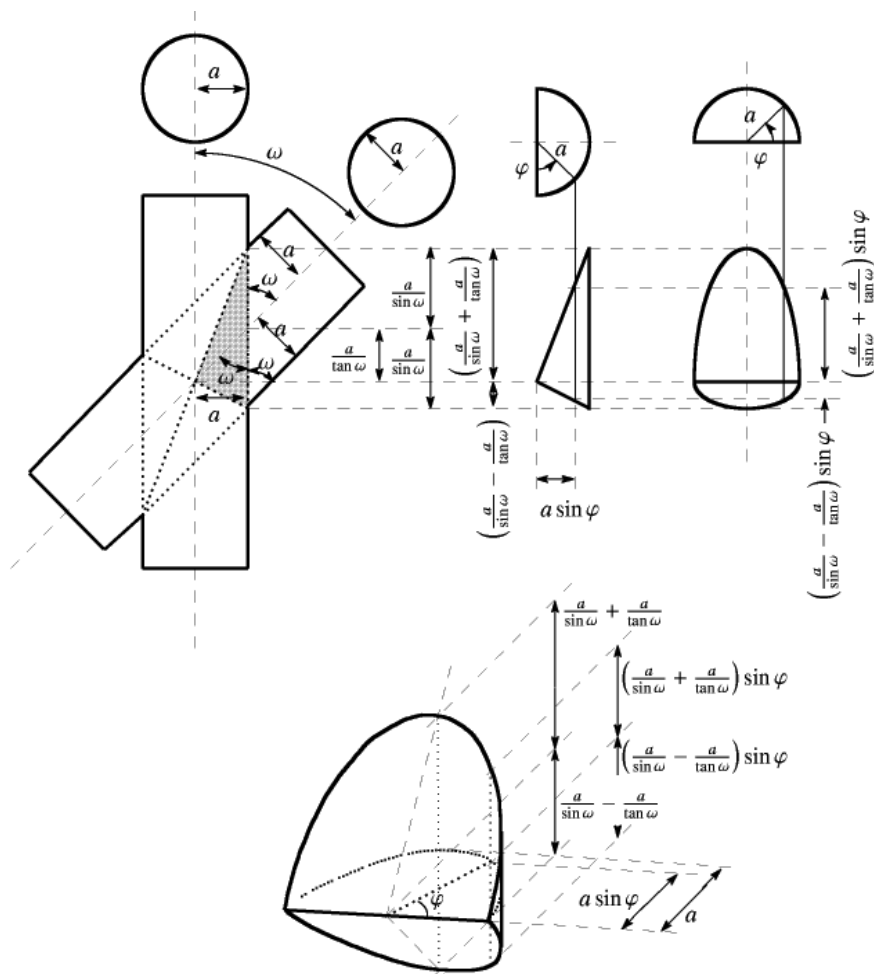


図 1

図1の図形の体積 V_1 を計算する。

図1の図形に含まれる図2のような微小直方体の微小体積を考え、これを積分すれば V_1 が求まる。

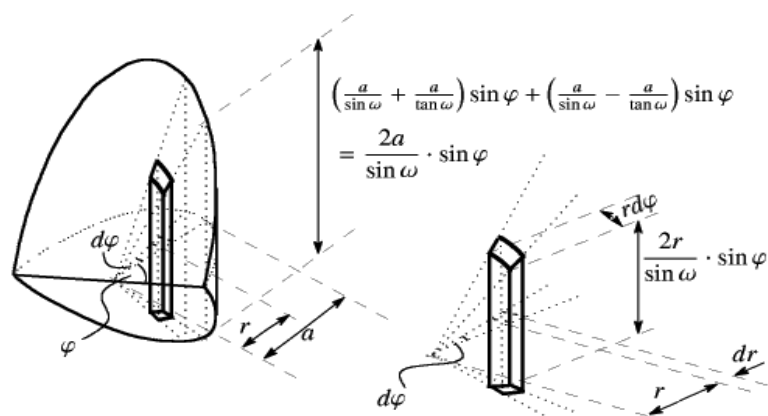


図 2

*28 あまりにも綺麗な図なので掲載する．“青空学園数学科「解析概論読書会」より．”

図 2 の微小直方体の微小体積は,

$$\frac{2r}{\sin \omega} \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr = \frac{2r^2}{\sin \omega} \cdot \sin \varphi dr d\varphi$$

だから, 図 1 の図形の体積 V_1 は,

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^\pi \int_0^a \frac{2r^2}{\sin \omega} \cdot \sin \varphi dr d\varphi = \frac{1}{\sin \omega} \int_0^\pi \left[\frac{2r^3}{3} \right]_0^a \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{2a^3}{3} \left[-\cos \varphi \right]_0^\pi = \frac{4a^3}{3 \sin \omega} . \end{aligned}$$

問題の体積 V は V_1 を四倍すればよいから,

$$V = 4V_1 = \frac{16a^3}{3 \sin \omega} \quad \blacksquare$$

2 放物面 $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ ($a > 0, b > 0$) が球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ ($R > 0$) から截 (切) り取る面積は $4\pi R\sqrt{ab}$ である. 但し, $\max(a, b) \leq R$ とする.

<解> $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$ とおく ($0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$).

球面 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ の北極 $(0, 0, 2R)$ と, xyz 空間上の点 $P(x, y, z)$ との距離を ρ とする.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + (z - 2R)^2 \\ &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - 4rR \cos \theta + 4R^2 \\ &= r^2 - 4rR \cos \theta + 4R^2 . \end{aligned} \tag{146}$$

放物面 $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ 上の点 (x, y, z) を r, θ, ϕ の関係で表すと,

$$r \cos \theta = \frac{r^2}{2a} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{r^2}{2b} \sin^2 \theta \sin^2 \phi .$$

$r \neq 0$ として^{*29},

$$\cos \theta = \left(\frac{\cos^2 \phi}{2a} + \frac{\sin^2 \phi}{2b} \right) r \cdot \sin^2 \theta \tag{147}$$

放物面が球 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$ を切り取るのであれば, 放物面と球面 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ の交わる点 (x, y, z) では (曲線 C とする), $r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + (r \cos \theta - R)^2 = R^2$ が成立する.

よって $r^2 - 2rR \cos \theta = 0$ であり, $r \neq 0$ として,

$$r - 2R \cos \theta = 0 \tag{148}$$

(148) を (147) へ代入すると

$$1 = \left(\frac{R \cos^2 \phi}{a} + \frac{R \sin^2 \phi}{b} \right) \sin^2 \theta \tag{149}$$

以下 $R \geq a \geq b$ と仮定しても一般性は失われない^{*30}.

^{*29} $r = 0$ の場合は $\rho = 2R$ であり $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ である事を意味するが, 1 点では曲面積を持たないので, $r = 0$ の場合は除外.

^{*30} $\frac{R}{a} = \frac{R \cos^2 \phi}{a} + \frac{R \sin^2 \phi}{a} \leq \frac{R \cos^2 \phi}{a} + \frac{R \sin^2 \phi}{b} \leq \frac{R \cos^2 \phi}{b} + \frac{R \sin^2 \phi}{b} = \frac{R}{b}$.

(148) より $\frac{R}{a} \sin^2 \theta \leq \left(\frac{R \cos^2 \phi}{a} + \frac{R \sin^2 \phi}{b} \right) \sin^2 \theta = 1 \leq \frac{R}{b} \sin^2 \theta$.

即ち $\frac{b}{R} \leq \sin^2 \theta \leq \frac{a}{R}$ (≤ 1) が成立し, (148) を満たす $\sin \theta$ が全ての ϕ に対して存在する. よって放物面が球を切り取る事が保証される.

(148) を (146) に代入し更に (149) を適用すると,

$$\rho^2 = 4R^2 \sin^2 \theta = \frac{4R}{\frac{\cos^2 \phi}{a} + \frac{\sin^2 \phi}{b}}.$$

面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{|C|} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\rho \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\phi \\ &= 2R \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{\cos^2 \phi}{a} + \frac{\sin^2 \phi}{b}} d\phi = 2R \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}} \quad (\odot \text{ 積分計算は §37[例 2] の計算による.}) \\ &= 4\pi R \sqrt{ab}. \blacksquare \end{aligned}$$

3 前問の放物面において,

(1°) 二つの等傾斜線 (xy 平面に対する) の間の面積は $\frac{2}{3}\pi ab (\sec^3 \gamma_1 - \sec^3 \gamma_2)$.

(2°) 直楕円筒 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の内部にある面積は $\frac{2}{3}\pi ab (\sqrt{8} - 1)$.

<解> (1°) 点 $P(x, y, z)$ を放物面 $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ の点, $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b}$ とする.

P における放線ベクトル $\mathbf{n} = (-p, -q, 1) = \left(-\frac{x}{a}, -\frac{y}{b}, 1\right)$. xy 平面の法線ベクトル $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$.

P における接平面と xy 平面のなす角 γ は $\mathbf{n}$ と $\mathbf{n}_0$ のなす角と等しいので,

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0}{|\mathbf{n}| |\mathbf{n}_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}} \quad (150)$$

で与えられる. 以下 $0 < \gamma_2 < \gamma_1 < \frac{\pi}{2}$ とする.

$$\begin{aligned} C_1 &:= \left\{ (x, y, z) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \tan^2 \gamma_1, z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \right. \right\} \\ C_2 &:= \left\{ (x, y, z) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \tan^2 \gamma_2, z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \right. \right\} \end{aligned}$$

は S 上の閉曲線である.

$(x, y, z) \in C_1$ であれば, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = \tan^2 \gamma_1 + 1 = \sec^2 \gamma_1$ であるから,

(150) によって C_1 は xy 平面と角 γ_1 をなす接平面を有する等傾斜線である.

同様に C_2 は xy 平面と角 γ_2 をなす接平面を有する等傾斜線である.

従って 2 つの等傾斜線 C_1, C_2 の間の面積 S は,

$$K_1 = \left\{ (x, y) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \tan^2 \gamma_1 \right. \right\}, K_2 = \left\{ (x, y) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \tan^2 \gamma_2 \right. \right\}$$

に対して, 以下の式で与えられる.

$$S = \iint_{K_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy - \iint_{K_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

K_1 上で $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$ とおくと, $0 \leq r \leq \tan \gamma_1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, かつ $J = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = abr$.

$$\iint_{K_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\tan \gamma_1} \sqrt{1 + r^2} (abr) dr = 2\pi ab \int_0^{\tan \gamma_1} r \sqrt{1 + r^2} dr$$

更に $u = \sqrt{1 + r^2}$ と置くと, $r = 0$ の時 $u = 1$, $r = \tan \gamma_1$ の時 $u = \sqrt{1 + \tan^2 \gamma_1} = \sec \gamma_1$.

$$u^2 = 1 + r^2 \text{ より } u \frac{du}{dr} = r.$$

$$\iint_{K_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 2\pi ab \int_1^{\sec \gamma_1} u^2 du = \frac{2\pi ab}{3} (\sec^3 \gamma_1 - 1).$$

同様にして,

$$\iint_{K_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{2\pi ab}{3} (\sec^3 \gamma_2 - 1).$$

以上より,

$$S = \frac{2\pi ab}{3} (\sec^3 \gamma_1 - 1) - \frac{2\pi ab}{3} (\sec^3 \gamma_2 - 1) = \frac{2\pi ab}{3} (\sec^3 \gamma_1 - \sec^3 \gamma_2). \blacksquare$$

(2°) 放物面 $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ の直楕円体の内部 $K : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ での面積 S は

$$S = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

かつ $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b}$ であるから,

$$S = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \iint_K \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dxdy.$$

$x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$ とおくと, $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, かつ $J = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = abr$.

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} (abr) dr = 2\pi ab \int_0^1 r \sqrt{1 + r^2} dr = \frac{2\pi ab}{3} (\sqrt{8} - 1). \blacksquare$$

4 n 次元空間において,

$$|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha + \cdots + |x_n|^\alpha \leq r^\alpha \quad (\alpha > 0)$$

なる区域の体積は

$$V = \frac{(2r)^\alpha}{\alpha^{n-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}.$$

特に $\alpha = 2$ とすれば, n 次元の球の体積として次の値を得る.

$$V = \frac{(r\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \begin{cases} r^n \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} & (n \text{ は偶数}) \\ r^n \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}.$$

<解>*31

(i) $n = 2$ のとき

$$V_2 : |x|^\alpha + |y|^\alpha \leq r^\alpha \quad (\alpha > 0) \text{ を求める.}$$

$$V_2^0 : x^\alpha + y^\alpha \leq r^\alpha, \quad x \geq 0, y \geq 0 \text{ とすれば } V_2 = 2^2 \cdot V_2^0.$$

$$x^\alpha + y^\alpha = \xi, \quad y^\alpha = \xi\eta \text{ とおくと,}$$

$$\begin{cases} x^\alpha &= \xi - \xi\eta = \xi(1 - \eta) \\ y^\alpha &= \xi\eta \end{cases} \quad (151)$$

であるから, $0 \leq \xi \leq r^\alpha, \quad 0 \leq \eta \leq 1$.

(151) より,

$$\alpha x^{\alpha-1} \frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 - \eta, \quad \therefore \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{\alpha} x^{1-\alpha} (1 - \eta)$$

$$\alpha x^{\alpha-1} \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\xi, \quad \therefore \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{\alpha} x^{1-\alpha} (-\xi)$$

$$\alpha y^{\alpha-1} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \eta, \quad \therefore \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{\alpha} y^{1-\alpha} \eta$$

$$\alpha y^{\alpha-1} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \xi, \quad \therefore \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{\alpha} y^{1-\alpha} \xi$$

であるから,

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{1}{\alpha^2} x^{1-\alpha} y^{1-\alpha} \begin{vmatrix} 1 - \eta & -\xi \\ \eta & \xi \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha^2} \xi x^{1-\alpha} y^{1-\alpha}.$$

$$\begin{aligned} V_2^0 &= \frac{1}{\alpha^2} \int_{\xi=0}^{r^\alpha} \int_{\eta=0}^1 \xi x^{1-\alpha} y^{1-\alpha} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \int_{\xi=0}^{r^\alpha} \int_{\eta=0}^1 \xi \cdot \xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} (1 - \eta)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \eta^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \int_{\xi=0}^{r^\alpha} \int_{\eta=0}^1 \xi^{\frac{2}{\alpha}-1} (1 - \eta)^{\frac{1}{\alpha}-1} \eta^{\frac{1}{\alpha}-1} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\alpha}{2} \xi^{\frac{2}{\alpha}} \right]_0^{r^\alpha} \int_{\eta=0}^1 (1 - \eta)^{\frac{1}{\alpha}-1} \eta^{\frac{1}{\alpha}-1} d\eta \\ &= \frac{r^2}{2\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{r^2}{2\alpha} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

故に,

$$V_2 = \frac{2r^2}{\alpha} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} = \frac{(2r)^2}{\alpha} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}.$$

(ii) $n = 3$ のとき

$$V_3 : |x|^\alpha + |y|^\alpha + |z|^\alpha \leq r^\alpha \quad (\alpha > 0) \text{ を求める.}$$

$$V_3^0 : x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \leq r^\alpha, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ とすれば } V_3 = 2^3 \cdot V_3^0.$$

$$x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha = \xi, \quad y^\alpha + z^\alpha = \xi\eta, \quad z^\alpha = \xi\eta\zeta$$

*31 元茨城県立水戸第一高等学校数学科 “会沢 力” 先生による.

とおくと,

$$\xi = x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha, \quad \eta = \frac{y^\alpha + z^\alpha}{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha}, \quad z^\alpha = \xi\eta\zeta$$

であるから, $0 \leq \xi \leq r^\alpha$, $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \zeta \leq 1$.

$$x^\alpha = \xi - \xi\eta, \quad y^\alpha = \xi\eta - \xi\eta\zeta, \quad z^\alpha = \xi\eta\zeta.$$

$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ を求めるために, 仲介の変数として

$$u = \xi, \quad v = \xi\eta, \quad w = \xi\eta\zeta$$

とすれば,

$$x^\alpha = u - v, \quad y^\alpha = v - w, \quad z^\alpha = w.$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \cdot \frac{D(u, v, w)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$$

であり,

$$\alpha x^{\alpha-1} \frac{\partial x}{\partial u} = 1 \quad \therefore \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\alpha} x^{1-\alpha}$$

$$\alpha x^{\alpha-1} \frac{\partial x}{\partial v} = -1 \quad \therefore \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{\alpha} x^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial x}{\partial w} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 0$$

$$\alpha y^{\alpha-1} \frac{\partial y}{\partial v} = 1 \quad \therefore \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\alpha} y^{1-\alpha}$$

$$\alpha y^{\alpha-1} \frac{\partial y}{\partial w} = -1 \quad \therefore \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{1}{\alpha} y^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$\alpha z^{\alpha-1} \frac{\partial z}{\partial w} = 1 \quad \therefore \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{\alpha} z^{1-\alpha}$$

であるから,

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \cdot \frac{D(u, v, w)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha} x^{1-\alpha} & -\frac{1}{\alpha} x^{1-\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} y^{1-\alpha} & -\frac{1}{\alpha} y^{1-\alpha} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} z^{1-\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \eta & \xi & 0 \\ \eta\zeta & \xi\zeta & \xi\eta \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha^3} x^{1-\alpha} y^{1-\alpha} z^{1-\alpha} \xi^2 \eta.$$

よって,

$$\begin{aligned}
V_3^0 &= \frac{1}{\alpha^3} \int_{\xi=0}^{\xi=r^\alpha} \int_{\eta=0}^{\eta=1} \int_{\zeta=0}^{\zeta=1} \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\eta)^{\frac{1}{\alpha}-1} \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} \eta^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\zeta)^{\frac{1}{\alpha}-1} \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} \eta^{\frac{1}{\alpha}-1} \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1} \xi^2 \eta d\xi d\eta d\zeta \\
&= \frac{1}{\alpha^3} \int_{\xi=0}^{\xi=r^\alpha} \int_{\eta=0}^{\eta=1} \int_{\zeta=0}^{\zeta=1} \xi^{\frac{3}{\alpha}-1} \eta^{\frac{2}{\alpha}-1} \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\eta)^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\zeta)^{\frac{1}{\alpha}-1} d\xi d\eta d\zeta \\
&= \frac{1}{\alpha^3} \cdot \frac{\alpha}{3} \cdot r^3 \int_{\eta=0}^{\eta=1} \int_{\zeta=0}^{\zeta=1} \eta^{\frac{2}{\alpha}-1} (1-\eta)^{\frac{1}{\alpha}-1} \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\zeta)^{\frac{1}{\alpha}-1} d\xi d\eta d\zeta \\
&= \frac{r^3}{3\alpha^2} \int_{\eta=0}^{\eta=1} (1-\eta)^{\frac{1}{\alpha}-1} \eta^{\frac{2}{\alpha}-1} d\eta \int_{\zeta=0}^{\zeta=1} (1-\zeta)^{\frac{1}{\alpha}-1} \zeta^{\frac{1}{\alpha}-1} d\zeta \\
&= \frac{r^3}{3\alpha^2} \cdot B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}\right) B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{r^3}{3\alpha^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)} . \\
\text{故に, } V_3 &= \frac{(2r)^3}{\alpha^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{3 \cdot \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)} .
\end{aligned}$$

n については, 以下同様に証明される. $\alpha = 2$ に対する説明は, Γ 関数の具体的書き下しに過ぎない. ■

5 曲面 S が媒介変数 u, v によって, $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ の形に表されるとき, $(r) = (x, y, z), r_u = (x_u, y_u, z_u), r_v = (x_v, y_v, z_v)$ とすれば, 原点からみた S の立体角は,

$$\iint_K \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}|^3} du dv$$

である. 但し K は uv 平面上 (u, v) の変動区域である.

<解> 曲面 S の点 (x, y, z) における法線ベクトルを $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$,

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2} .$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}}{\Delta}, \cos \beta = \frac{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}}{\Delta}, \cos \gamma = \frac{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}}{\Delta} \text{ に対して,}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) &= \begin{vmatrix} x & x_u & x_v \\ y & y_u & y_v \\ z & z_u & z_v \end{vmatrix} = x \cdot \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + y \cdot \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + z \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \\
&= (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \Delta = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \Delta
\end{aligned} \tag{152}$$

ところで立体角 Ω は §102 *32 より, $\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}|}$ に対して $\Omega = \int_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} d\sigma$ で定義される.

従って,

$$\begin{aligned}
\Omega &= \int_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} d\sigma = \int_S \frac{|\mathbf{r}| \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{|\mathbf{r}|^3} d\sigma \quad (\text{定義より}) \\
&= \iint_K \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}|^3} \Delta du dv \quad (\S 98 \text{ 第 (9) 式より. } K \text{ は } (u, v) \text{ の定義域を表す.}) \\
&= \iint_K \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{|\mathbf{r}|^3} du dv \quad ((152) \text{ より}) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

*32 定本 p.415[注意] より.

6 適当なる一般的仮定の下において，面積分

$$\int_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

が S の境界線 C のみに関係するために必要かつ十分なる条件は

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 .$$

<解> $\mathbf{u} = (P, Q, R)$ とおく．以下，表記は全て本書に従う．

($\Leftarrow$) $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ であれば，三次元空間上の区域 K 中の任意の曲面 S において，§103 冒頭に述べた通り，

$$\int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \int_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

は S の境界線 C にのみ依存する．

($\Rightarrow$) 三次元空間上の曲面を S ， S の境界を C とし，

$$\int_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \text{ の値が } C \text{ のみに依存して定まる.} \quad (153)$$

$$\text{三次元空間上のある区域 } K_H \text{ で } \operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0 \ ((x, y, z) \in K_H) \quad (154)$$

が成立すると仮定する．

K_H 内部の適当な閉曲面 S_0 ， S_0 の内部の三次元区域 K_0 で，

$$\operatorname{div} \mathbf{u} > 0 \ ((x, y, z) \in K_0) \quad (155)$$

とすることが出来る^{*33}．

この時，Gauss の定理より，

$$0 < \int_{K_0} \operatorname{div} \mathbf{u} d\omega = \int_{S_0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\sigma . \quad (156)$$

一方，仮定により $\int_{S_0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$ は S_0 の境界線によってのみ定まるが，平曲面 S には境界線が存在しないの

で，(153) より， $\int_{S_0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0$ でなくてはならない．

従って，命題“三次元空間上のある区域 K_H で $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0 \ ((x, y, z) \in K_H)$ ”は誤りである．■

7 適当なる一般的仮定の下において， $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ ならば $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ ．

<解> 三次元空間内の適当な単連結領域 K で，

$$\exists A_0(x, y, z) \text{ s.t. } \frac{\partial A_0(x, y, z)}{\partial z} = b(x, y, z) \quad (157)$$

$$\exists B_0(x, y, z) \text{ s.t. } \frac{\partial B_0(x, y, z)}{\partial z} = -a(x, y, z) \quad (158)$$

$A_0(x, y, z), B_0(x, y, z)$ は K 上 2 階連続微分可能であると仮定する．

^{*33} 若しくは $\operatorname{div} \mathbf{u} < 0$ であるが，この場合は $-\mathbf{u}$ を $\mathbf{u}$ と置き換える．

まず,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_0(x, y, z)}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_0(x, y, z)}{\partial z} \right) &= \frac{\partial b(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial y} = -\frac{\partial c(x, y, z)}{\partial y} \quad (\odot \operatorname{div} \mathbf{u} = 0) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(c(x, y, z) - \left(\frac{\partial B_0(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial A_0(x, y, z)}{\partial y} \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (159)$$

よって, K 上 1 階連続微分可能な函数 $\phi_0(x, y)$ が存在して,

$$\phi_0(x, y) = c(x, y, z) - \left(\frac{\partial B_0(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial A_0(x, y, z)}{\partial y} \right) \quad (160)$$

$$\exists \Phi_0(x, y) \text{ s.t. } \phi_0(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_0(x, y) \quad (161)$$

改めて,

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= A_0(x, y, z) \\ B(x, y, z) &= B_0(x, y, z) - \Phi_0(x, y) \\ \mathbf{v}(x, y, z) &= (A(x, y, z), B(x, y, z), 0) \end{aligned}$$

とする.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y, z) &= \left(-\frac{\partial B(x, y, z)}{\partial z}, \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z}, \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial y} \right) \\ -\frac{\partial B(x, y, z)}{\partial z} &= -\frac{\partial B_0(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial z} = a(x, y, z) \\ &(\odot (158) \text{ 及び } \exists \Phi_0(x, y) \text{ が } z \text{ に依存しない}) . \\ \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} &= \frac{\partial A_0(x, y, z)}{\partial z} = b(x, y, z) \quad (\odot (157)) . \\ \frac{\partial B(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial y} &= \frac{\partial B_0(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial A_0(x, y, z)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial B_0(x, y, z)}{\partial x} - \phi_0(x, y) - \frac{\partial A_0(x, y, z)}{\partial y} \quad (\odot (164)) \\ &= c(x, y, z) \quad (\odot (160)) \end{aligned}$$

従って $\operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{u}(x, y, z)$. ■

[8] 区域 K において定義せられた函数 $f(P)$ に関し, 広義積分 $\int_K |f(P)| d\omega$ が存在するとする (§94 の定義参照). 然らば K に収束する任意の区域列 (367 頁-定義参照) $\{K_n\}$ に関し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f(P) d\omega = \int_K f^+(P) d\omega - \int_K f^-(P) d\omega .$$

<解>*34

H を $H \subset K$ なる面積確定な有界閉区域とする. H の選び方に関係なく $\int_H |f(P)| d\omega$ は有界である (定本 p.368 の命題). 同様に広義積分にあたっての前提 (§94 冒頭 (3°)) によって $\int_H f(P) d\omega$ も有界である.

*34 (以下は本文からの [解].)

仮定によって $\int_K |f| d\omega$ は収束するから, 任意の開区域 $H \subset K$ に関し $\int_H |f| d\omega$ は有界である (§94).

従って, $f^+(P) \leq |f(P)|, f^-(P) \leq |f(P)|$ によって, $\int_H f^+ d\omega, \int_H f^- d\omega$ は有界, 故に $\int_K f^+ d\omega, \int_K f^- d\omega$ は収束する.

従って, $\int_{K_n} f d\omega = \int_{K_n} f^+ d\omega - \int_{K_n} f^- d\omega$ は $n \rightarrow \infty$ のとき収束して (収束する二つの数列の差!), 標記の等式を得る.

有界区域上での積分の性質により

$$\begin{aligned}\int_H |f(P)| d\omega &= \int_H f^+(P) d\omega + \int_H f^-(P) d\omega \\ \int_H f(P) d\omega &= \int_H f^+(P) d\omega - \int_H f^-(P) d\omega .\end{aligned}$$

従って,

$$\int_H f^+(P) d\omega = \frac{1}{2} \left(\int_H |f(P)| d\omega + \int_H f(P) d\omega \right) \quad (162)$$

$$\int_H f^-(P) d\omega = \frac{1}{2} \left(\int_H |f(P)| d\omega - \int_H f(P) d\omega \right) \quad (163)$$

は有界である.

従って, §94 (定本 p.368) により, $\int_K f^+(P) d\omega$ 及び $\int_K f^-(P) d\omega$ が存在する.
 $\{K_n\}$ を K に収束する面積確定な有界閉区域列とする. $K \supset K_n$ であるから,

$$f(P) = f^+(P) - f^-(P) \quad (164)$$

は K_n 上でも成立する.

有界区域における定積分の性質 §92(2°) 及び (164) より,

$$\begin{aligned}\int_{K_n} f(P) d\omega &= \int_{K_n} (f^+(P) - f^-(P)) d\omega \\ &= \int_{K_n} f^+(P) d\omega - \int_{K_n} f^-(P) d\omega \quad (\S 92(2^\circ) \text{ より})\end{aligned} \quad (165)$$

K において常に正 (又は 0) となる函数の広義積分の定義 (§94(5)(6)) より,

$$\int_K f^+(P) d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f^+(P) d\omega \quad (166)$$

$$\int_K f^-(P) d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f^-(P) d\omega \quad (167)$$

従って,

$$\begin{aligned}\left| \int_{K_n} f(P) d\omega - \left(\int_K f^+(P) d\omega - \int_K f^-(P) d\omega \right) \right| \\ \leq \left| \int_{K_n} f(P) d\omega - \left(\int_{K_n} f^+(P) d\omega - \int_{K_n} f^-(P) d\omega \right) \right| \\ + \left| \int_{K_n} f^+(P) d\omega - \int_K f^+(P) d\omega \right| + \left| \int_{K_n} f^-(P) d\omega - \int_K f^-(P) d\omega \right| .\end{aligned}$$

ところで,

$$\left| \int_{K_n} f(P) d\omega - \left(\int_{K_n} f^+(P) d\omega - \int_{K_n} f^-(P) d\omega \right) \right| = 0 \quad (\odot (165) \text{ 及び } \S 92 (2^\circ)) .$$

$$\left| \int_{K_n} f^+(P) d\omega - \int_K f^+(P) d\omega \right| \rightarrow 0 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty) \quad (\odot \S 94 \text{ 広義積分の定義から.})$$

$$\left| \int_{K_n} f^-(P) d\omega - \int_K f^-(P) d\omega \right| \rightarrow 0 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty) \quad (\odot \S 94 \text{ 広義積分の定義から.})$$

従って,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f(P) d\omega = \int_K f^+(P) d\omega - \int_K f^-(P) d\omega .$$

を得る. ■