

第3章・章末問題と解答

以下積分定数 C は省略し, $i = \sqrt{-1}$ とする.

1 次の不定積分は “できる” ^a. 但し a, b, c は定数, P, Q は多項式, R は有理式である.

$$(1^\circ) \int P(x)e^{ax} \cos bx \, dx \quad , \quad \int P(x)e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$(2^\circ) \int P(\cos a_1 x, \dots, \cos a_p x, \sin b_1 x, \dots, \sin b_q x) \, dx$$

$$(3^\circ) \int e^{cx} Q(x) P(\cos a_1 x, \dots, \cos a_p x, \sin b_1 x, \dots, \sin b_q x) \, dx$$

$$(4^\circ) \int R'(x) \log x \, dx \quad , \quad \int R'(x) \arctan x \, dx \quad , \quad \int R'(x) \arcsin x \, dx$$

^a $f(x)$ が初等函数であるとき, その原始函数が初等函数の範囲内に存在することをいう.

$$\begin{aligned} (1^\circ) \int e^{ax} \cos bx \, dx + i \int e^{ax} \sin bx \, dx \\ = \int e^{(a+bi)x} \, dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \frac{(a-bi)e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)}{a^2+b^2} \\ = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} \cdot e^{ax} + i \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} \cdot e^{ax} \end{aligned}$$

によって, $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \sin bx$ は積分可能である.

以下帰納法によって $x^n e^{ax} \cos bx$, $x^n e^{ax} \sin bx$ が積分可能であることを示す. $(a, b) \neq (0, 0)$ とする.

$$\frac{d}{dx} (xe^{ax} \cos bx) = e^{ax} \cos bx + axe^{ax} \cos bx - bxe^{ax} \sin bx \quad (32)$$

$$\frac{d}{dx} (xe^{ax} \sin bx) = e^{ax} \sin bx + axe^{ax} \sin bx + bxe^{ax} \cos bx \quad (33)$$

(32) $\times a$ + (33) $\times b$ によって,

$$xe^{ax} \cos bx = \frac{1}{a^2+b^2} \left(a \frac{d}{dx} (xe^{ax} \cos bx) + b \frac{d}{dx} (xe^{ax} \sin bx) - ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx \right)$$

右辺は積分可能であるから, $xe^{ax} \cos bx$ は積分可能である.

(33) $\times a$ - (32) $\times b$ によって,

$$xe^{ax} \sin bx = \frac{1}{a^2+b^2} \left(a \frac{d}{dx} (xe^{ax} \sin bx) - b \frac{d}{dx} (xe^{ax} \cos bx) - ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx \right)$$

同様に右辺は積分可能であるから, $xe^{ax} \sin bx$ は積分可能である.

$x^n e^{ax} \cos bx$, $x^n e^{ax} \sin bx$ が積分可能であると仮定する.

$$\frac{d}{dx} (x^{n+1} e^{ax} \cos bx) = (n+1)x^n e^{ax} \cos bx + ax^{n+1} e^{ax} \cos bx - bx^{n+1} e^{ax} \sin bx \quad (34)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{n+1} e^{ax} \sin bx) = (n+1)x^n e^{ax} \sin bx + ax^{n+1} e^{ax} \sin bx + bx^{n+1} e^{ax} \cos bx \quad (35)$$

(34) $\times a$ + (35) $\times b$ によって,

$$x^{n+1}e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a^2+b^2} \left(a \frac{d}{dx} (x^{n+1}e^{ax}\cos bx) + b \frac{d}{dx} (x^{n+1}e^{ax}\sin bx) \right) \\ - \frac{n+1}{a^2+b^2} (ax^n e^{ax}\cos bx + bx^n e^{ax}\sin bx)$$

(35) $\times a - (34) \times b$ によって,

$$x^{n+1}e^{ax}\sin bx = \frac{1}{a^2+b^2} \left(a \frac{d}{dx} (x^{n+1}e^{ax}\sin bx) - b \frac{d}{dx} (x^{n+1}e^{ax}\cos bx) \right) \\ - \frac{n+1}{a^2+b^2} (ax^n e^{ax}\sin bx - bx^n e^{ax}\cos bx)$$

各々の右辺は帰納法の仮定から積分可能であるから, $x^{n+1}e^{ax}\cos bx$, $x^{n+1}e^{ax}\sin bx$ は積分可能である.

よって $P(x)$ が x の多項式であるとすれば, $P(x)e^{ax}\cos bx$, $P(x)e^{ax}\sin bx$ は積分可能である.

(2°) “積 + 和” の公式により m, n が自然数の時,

$$\cos^m a_i x \cos^n a_j x = (\cos a_i x \cos a_j x) \cos^{m-1} a_i x \cos^{n-1} a_j x \\ = \frac{\cos(a_i - a_j)x + \cos(a_i + a_j)x}{2} \cdot \cos^{m-1} a_i x \cos^{n-1} a_j x \\ = \frac{1}{2} (\cos(a_i - a_j)x \cdot \cos^{m-1} a_i x \cos^{n-1} a_j x + \cos(a_i + a_j)x \cdot \cos^{m-1} a_i x \cos^{n-1} a_j x)$$

となり $\sin$ 及び $\cos$ に関する次数を $m+n$ 次から $m+n-1$ 次へ, 1 次だけ減らすことができる.

同様に,

$$\sin^m a_i x \sin^n a_j x, \sin^m a_i x \cos^n a_j x, \cos^m a_i x \sin^n a_j x$$

も $\sin$ 及び $\cos$ に関する次数を $m+n$ 次から $m+n-1$ 次へ, 1 次だけ減らすことができる.

$P(u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_q)$ が, $u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_q$ についての多項式函数であれば,

$P(\cos a_1 x, \dots, \cos a_p x, \sin b_1 x, \dots, \sin b_q x)$ は上記により, $\sin$ 及び $\cos$ に関する 1 次式と定数の和に変形できる. よって, $P(\cos a_1 x, \dots, \cos a_p x, \sin b_1 x, \dots, \sin b_q x)$ は積分可能である.

(3°) (2°) と同様に, $P(\cos a_1 x, \dots, \cos a_p x, \sin b_1 x, \dots, \sin b_q x)$ を $\sin$ 及び $\cos$ に関する 1 次式と定数の和に変形すれば, (1°) に帰着するので, $e^{cx}Q(x)P(\cos a_1 x, \dots, \cos a_p x, \sin b_1 x, \dots, \sin b_q x)$ は積分可能である.

(4°) $\frac{d}{dx} (R(x) \log x) = R'(x) \log x + \frac{R(x)}{x}$ であり, 有理函数 $\frac{R(x)}{x}$ は積分可能であるから,

$$\int R'(x) \log x \, dx = R(x) \log x - \int \frac{R(x)}{x} \, dx$$

は積分可能である.

$\frac{d}{dx} (R(x) \arctan x) = R'(x) \arctan x + \frac{R(x)}{1+x^2}$ であり, 有理函数 $\frac{R(x)}{1+x^2}$ は積分可能であるから,

$$\int R'(x) \arctan x \, dx = R(x) \arctan x - \int \frac{R(x)}{1+x^2} \, dx$$

は積分可能である.

$\frac{d}{dx} (R(x) \arcsin x) = R'(x) \arcsin x + \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ であり, 函数 $\frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ は本文 §37() により積分可能であるから,

$$\int R'(x) \arcsin x \, dx = R(x) \arcsin x - \int \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

は積分可能である. ■

~~~~~  
 <補足> “有理函数が可積分であること”

ここでは、(4°) で証明無しで用いた、「有理函数が可積分」であることを示す。

そこで、 $f(x), g(x)$  が整式のとき、その商  $\frac{f(x)}{g(x)}$  の不定積分について考える。 $f(x)$  の次数  $>$   $g(x)$  の次数 の場合は、 $f(x)$  を  $g(x)$  で割った商を  $q(x)$ 、余りを  $r(x)$  とすると、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad , \quad (0 \leq r(x) \text{ の次数} < g(x) \text{ の次数})$$

とる。 $q(x)$  は整式なので、その積分は容易。そこで“ $f(x)$  の次数  $<$   $g(x)$  の次数” の場合を考える。

代数学の基本定理 (fundamental theorem of algebra) によると、すべての (実係数) 整式は 1 次式と 2 次式の積で表わすことができる。よって  $g(x)$  は次のように因数分解される。

$$g(x) = p(x - \alpha)^l (x - \beta)^m \cdots \left( (x - a)^2 + b^2 \right)^r \left( (x - c)^2 + d^2 \right)^s \cdots$$

次に  $\frac{r(x)}{g(x)}$  を部分分数分解する。部分分数分解 (partial fraction) とは  $\frac{r(x)}{g(x)}$  を分子の次数が分母の括弧内の次数より 1 次少ない分数で、その数が  $g(x)$  の因数の数となるように分解することと定義される。

$\frac{r_1(x)}{(x - \alpha)^l}$  を部分分数分解する。

分母の因数の数は  $l$  より、 $l$  個の部分分数が必要となる。また、分母の括弧内の次数が 1 より分子は定数となることに注意すると、

$$\frac{r_1(x)}{(x - \alpha)^l} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(x - \alpha)^l} \quad .$$

次に、 $\frac{r_2(x)}{\left( (x - a)^2 + b^2 \right)^r}$  を部分分数分解する。分母の因数の数は  $r$  より、 $r$  個の部分分数が必要となる。また、分母の括弧内の次数が 2 より分子は 1 次式となることに注意すると、

$$\frac{r_2(x)}{\left( (x - a)^2 + b^2 \right)^r} = \frac{C_1 x + D_1}{(x - a)^2 + b^2} + \frac{C_2 x + D_2}{\left( (x - a)^2 + b^2 \right)^2} + \cdots + \frac{C_r x + D_r}{\left( (x - a)^2 + b^2 \right)^r} \quad .$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{g(x)} &= \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_l}{(x - \alpha)^l} + \frac{B_1}{x - \beta} + \frac{B_2}{(x - \beta)^2} + \cdots + \frac{B_m}{(x - \beta)^m} \\ &\quad + \frac{C_1 x + D_1}{(x - a)^2 + b^2} + \frac{C_2 x + D_2}{\left( (x - a)^2 + b^2 \right)^2} + \cdots + \frac{C_r x + D_r}{\left( (x - a)^2 + b^2 \right)^r} \quad . \end{aligned}$$

次に、 $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, D_1, \dots, C_r, D_r, \dots$  を求める。

$g(x)$  を両辺にかけて、分母を払うと両辺に多項式が生じる。この多項式は全ての  $x$  で等しいので、対応する係数同士は等しい。そこで左辺の  $x^k$  の係数と右辺の  $x^k$  の係数を等しくおくことにより連立方程式できる。この連立方程式を解けば定数  $A_i, B_i, C_i, D_i, \dots$  が求まり、部分分数分解が完成する。

このように  $\frac{f(x)}{g(x)}$  の部分分数分解はいくつかの次の形の分数の和として表わせる。

$$\frac{A}{(x - \alpha)^n} \quad , \quad \frac{Bx + C}{\left( (x - a)^2 + b^2 \right)^n} \quad .$$

左の函数の不定積分は簡単なので、右のほうを考える。

$x - a = t$  とおくと、次の形の函数に帰着する。

$$\frac{1}{(x^2 + b^2)^n} \quad , \quad \frac{x}{(x^2 + b^2)^n} \quad .$$

まとめると、有理函数の不定積分は次の 3 つの函数の不定積分ができれば必ず求められることがわかる。

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \frac{dx}{(x - a)^n} &= \begin{cases} \frac{-1}{(n - 1)(x - a)^{n-1}} & (n = 2, 3, 4, \dots) \\ \log |x - a| & (n = 1) \end{cases} \\ (2) \quad \int \frac{x}{(x^2 + b^2)^n} dx &= \begin{cases} \frac{-1}{2(n - 1)(x^2 + b^2)^{n-1}} & (n = 2, 3, 4, \dots) \\ \frac{1}{2} \log |x^2 + b^2| & (n = 1) \end{cases} \\ (3) \quad I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + A)^n} dx \quad \text{とおくと、次の漸化式が成り立つ。} \end{aligned}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nA} \left( \frac{x}{(x^2 + A)^n} + (2n - 1)I_n \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1), (2) の証明は単なる計算問題。

(3) は部分積分を用いて,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2 + A)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + A)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + A)^n} + 2n \int \frac{x^2 + A - A}{(x^2 + A)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + A)^n} + 2n \cdot I_n - 2nA \cdot I_{n+1} \end{aligned}$$

と証明される. ■

以上により, 有理函数から生じた各部分分数は勿論可積分だから, 結局, “有理函数は可積分” である.

$$\boxed{2} \quad \int \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \binom{n}{k} \frac{\sin(n-2k)x}{n-2k} + \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} x & (n : \text{偶数}) \\ \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \frac{\sin(n-2k)x}{n-2k} & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

基本的アイデアは,  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  において  $n$  乗し, その後二項展開することである. 後は index を慎重に操作することになる.

$$(1^\circ) \cos^n x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^{n-k} (e^{-ix})^k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x}$$

(i)  $n = 2m$  (偶数) のとき.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} &= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} e^{i(2m-2k)x} \\ &= \frac{1}{2^{2m}} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} e^{i(2m-2k)x} + \binom{2m}{m} + \sum_{k=m+1}^{2m} \binom{2m}{k} e^{i(2m-2k)x} \right) \end{aligned}$$

ところで,  $l = 2m - k$  とおくと,

$$\sum_{k=m+1}^{2m} \binom{2m}{k} e^{i(2m-2k)x} = \sum_{l=0}^{m-1} \binom{2m}{2m-l} e^{-i(2m-2l)x} = \sum_{l=0}^{m-1} \binom{2m}{l} e^{-i(2m-2l)x} \quad \text{だから,}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^n x \, dx &= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \int e^{i(2m-2k)x} \, dx \\ &= \frac{1}{2^{2m}} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \int e^{i(2m-2k)x} \, dx + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{2m}{l} \int e^{-i(2m-2l)x} \, dx + \binom{2m}{m} \int dx \right) \\ &= \frac{1}{2^{2m}} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \int (e^{i(2m-2k)x} + e^{-i(2m-2k)x}) \, dx + \binom{2m}{m} x \right) \\ &= \frac{1}{2^{2m}} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \int (2 \cos(2(m-k)x)) \, dx + \binom{2m}{m} x \right) \\ &= \frac{1}{2^{2m-1}} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \frac{\sin(2(m-k)x)}{2m-2k} \right) + \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} x \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} \binom{n}{k} \frac{\sin(n-2k)x}{n-2k} + \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} x \end{aligned}$$

(ii)  $n = 2m + 1$  (奇数) のとき .

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} &= \frac{1}{2^{2m+1}} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} e^{i(2m+1-2k)x} \\ &= \frac{1}{2^{2m+1}} \left( \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{k} e^{i(2m+1-2k)x} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} e^{i(2m+1-2k)x} \right)\end{aligned}$$

ところで  $l = 2m + 1 - k$  とおくと,

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} e^{i(2m+1-2k)x} &= \sum_{l=0}^m \binom{2m+1}{2m+1-l} e^{i(2l-2m-1)x} \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{2m+1}{l} e^{-i(2m+1-2l)x} \quad \text{だから,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^n x \, dx &= \frac{1}{2^{2m+1}} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \int e^{i(2m+1-2k)x} \, dx \\ &= \frac{1}{2^{2m+1}} \left( \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{k} \int e^{i(2m+1-2k)x} \, dx + \sum_{l=0}^m \binom{2m+1}{l} \int e^{-i(2m+1-2l)x} \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2^{2m+1}} \left( \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{k} \int \left( e^{i(2m+1-2k)x} + e^{-i(2m+1-2k)x} \right) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2^{2m+1}} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m+1}{k} \int (2 \cos((2m+1-2k)x)) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2^{2m}} \left( \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{k} \frac{\sin((2m+1-2k)x)}{2m+1-2k} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \frac{\sin(n-2k)x}{n-2k} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**3**  $\alpha \neq 0$  のとき,

$$(1^\circ) \int \sin^{\alpha-1} x \cdot \cos(\alpha+1)x \, dx = \frac{1}{\alpha} \sin^\alpha x \cdot \cos \alpha x$$

$$(2^\circ) \int \sin^{\alpha-1} x \cdot \sin(\alpha+1)x \, dx = \frac{1}{\alpha} \sin^\alpha x \cdot \sin \alpha x$$

$$(3^\circ) \int \cos^{\alpha-1} x \cdot \cos(\alpha+1)x \, dx = \frac{1}{\alpha} \cos^\alpha x \cdot \sin \alpha x$$

$$(4^\circ) \int \cos^{\alpha-1} x \cdot \sin(\alpha+1)x \, dx = -\frac{1}{\alpha} \cos^\alpha x \cdot \cos \alpha x$$

< 解 > 基本的には “右辺” を微分して, 被積分函数になることを確認すれば良いことになる .

例えば (3°) では,

$$\begin{aligned}\left( \frac{1}{\alpha} \cos^\alpha x \cdot \sin \alpha x \right)' &= \cos^{\alpha-1} x \cdot (-\sin x) \cdot \sin \alpha x + \cos^\alpha x \cdot \cos \alpha x \\ &= \cos^{\alpha-1} x \cdot (-\sin x \cdot \sin \alpha x + \cos x \cdot \cos \alpha x) = \cos^{\alpha-1} x \cdot \cos(x + \alpha x) \\ &= \cos^{\alpha-1} x \cdot \cos(\alpha+1)x\end{aligned}$$

となり確認出来る．他も同様である．しかし，これではあまりにも情けないので，積分を正当にすることにしよう．

(2°) について．

$$\sin^{\alpha-1} x \cdot \sin(\alpha+1)x = \sin^{\alpha-1} x \cdot (\sin \alpha x \cos x + \cos \alpha x \sin x) = \left( \frac{\sin^\alpha x}{\alpha} \right)' \sin \alpha x + \sin^\alpha x \cos \alpha x$$

によって，

$$\begin{aligned} \int \sin^{\alpha-1} x \cdot \sin(\alpha+1)x \, dx &= \int \left( \frac{\sin^\alpha x}{\alpha} \right)' \sin \alpha x \, dx + \int \sin^\alpha x \cos \alpha x \, dx \\ &= \left( \frac{\sin^\alpha x}{\alpha} \right) \sin \alpha x - \int \sin^\alpha x \cos \alpha x \, dx + \int \sin^\alpha x \cos \alpha x \, dx \\ &= \frac{1}{\alpha} \sin^\alpha x \cdot \sin \alpha x \quad \text{を得る．} \end{aligned}$$

同様にして，他も計算出来る． ■

**4**  $F, f, g, \varphi, \psi$  を有理式とする．

$$\begin{aligned} F(\cos x, \sin x) &= f(\cos x) + g(\cos x) \sin x \\ f(\cos x) &= \varphi(\cos^2 x) + \psi(\cos^2 x) \cos x \end{aligned}$$

右辺の第 2 項は，それぞれ変換  $t = \cos x$ ， $t = \sin x$  によって有理化されることにより積分可能．  
 $\varphi(\cos^2 x)$  の積分は  $t = \tan x$  で有理化され，積分可能．即ち  $t = \tan \frac{x}{2}$  を用いずに積分可能である．

有理函数  $F, f$  が問題文のように表されるとすると， $f(\cos x)$  における右辺の第 1 項は， $t = \tan x$  によって

$$\int \varphi(\cos^2 x) \, dt = \int \varphi \left( \frac{1}{1+t^2} \right) (1+t^2) \, dt$$

のように有理化されるので積分可能<sup>\*12</sup>である．

また第 2 項は， $t = \sin x$  によって

$$\int \psi(\cos^2 x) \cos x \, dx = \int \psi(1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int \psi(1 - t^2) \, dt$$

のように有理化されるので積分可能であるから，結局  $f(\cos x)$  は積分可能である．

$F(\cos x, \sin x)$  における右辺の第 2 項は， $t = \cos x$  によって

$$\int g(\cos x) \sin x \, dx = \int (-g(t)) \, dt$$

のように有理化されるので積分可能である．

よって，証明すべき残りは“有理函数  $F, f$  が問題文のように表される”ことである．

多項式  $P$  に関して，

$$P(\cos x, \sin x) = \sum_{\rho, \mu, \nu \in \mathbb{N} + \{0\}} a_\rho \cos^\mu x \sin^\nu x = Q_1(\cos x) + Q_2(\cos x) \sin x \quad (Q_1, Q_2 \text{ は多項式})$$

<sup>\*12</sup> 演習 **1** 解答後の“有理函数が可積分であること”を参照．

と表される．実際， $\sin^\nu x$  において  $\nu$  が偶数であるなら  $P$  は  $\cos x$  に関する多項式であるし， $\nu$  が奇数であるなら  $\sin^\nu x = (\sin^2 x)^m \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x)^m \cdot \sin x$  となるので  $Q_2(\cos x) \sin x$  が出てくる．

$$\begin{aligned} F(\cos x, \sin x) &= \frac{P_1(\cos x, \sin x)}{P_2(\cos x, \sin x)} = \frac{Q_1(\cos x) + Q_2(\cos x) \sin x}{R_1(\cos x) + R_2(\cos x) \sin x} \\ &= \frac{(Q_1(\cos x) + Q_2(\cos x) \sin x)(R_1(\cos x) - R_2(\cos x) \sin x)}{(R_1(\cos x) + R_2(\cos x) \sin x)(R_1(\cos x) - R_2(\cos x) \sin x)} \\ &\quad = \frac{T(\cos x)}{S(\cos x)} \text{ とおく} \\ &= \frac{Q_1 R_1 + (R_1 Q_2 - R_2 Q_1) \sin x - \overbrace{Q_2 R_2 (1 - \cos^2 x)}^{=T(\cos x) \text{ とおく}}}{\underbrace{R_1^2 - R_2^2 (1 - \cos^2 x)}_{=S(\cos x) \text{ とおく}}} = \frac{Q_1 R_1 - T}{S} + \frac{R_1 Q_2 - R_2 Q_1}{S} \sin x \end{aligned}$$

となるので， $f(\cos x) := \frac{Q_1 R_1 - T}{S}$ ， $g(\cos x) := \frac{R_1 Q_2 - R_2 Q_1}{S}$  とおけば，  
 $F(\cos x, \sin x) = f(\cos x) + g(\cos x) \sin x$  となった．

$$\begin{aligned} f(\cos x) &= \frac{P_3(\cos x)}{P_4(\cos x)} = \frac{Q_1(\cos^2 x) + Q_2(\cos^2 x) \cos x}{R_1(\cos^2 x) + R_2(\cos^2 x) \cos x} = \frac{(Q_1 + Q_2 \cos x)(R_1 - R_2 \cos x)}{(R_1 + R_2 \cos x)(R_1 - R_2 \cos x)} \\ &= \frac{Q_1 R_1 - Q_2 R_2 \cos^2 x + (Q_2 R_1 - Q_1 R_2) \cos x}{R_1^2 - R_2^2 \cos^2 x} = \frac{\overbrace{Q_1 R_1 - Q_2 R_2 \cos^2 x}^{=S_1(\cos^2 x) \text{ とおく}} + \overbrace{(Q_2 R_1 - Q_1 R_2) \cos x}^{=S_2(\cos^2 x) \text{ とおく}}}{\underbrace{R_1^2 - R_2^2 \cos^2 x}_{=T(\cos^2 x) \text{ とおく}}} \\ &= \frac{S_1}{T} + \frac{S_2}{T} \cos x = \varphi(\cos^2 x) + \psi(\cos^2 x) \cos x \text{ となる．} \blacksquare \end{aligned}$$

**5** 二項微分の積分  $I_{p,q} = \int t^p (at + b)^q dt$  に関して，次の簡約式が成立する．

$$(1^\circ) \quad (p + q + 1)I_{p,q} = qbI_{p,q-1} + t^{p+1}(at + b)^q$$

$$(2^\circ) \quad a(p + q + 1)I_{p,q} = -pbI_{p-1,q} + t^p(at + b)^{q+1}$$

これを用いて， $p$  または  $q$  を区間  $[-1, 0]$  または  $[0, 1]$  に導ける．

最後の，“ $p$  または  $q$  を区間  $[-1, 0]$  または  $[0, 1]$  に導ける” については，右辺の式が， $I_{p,q} \rightarrow I_{p,q-1}$  or  $I_{p-1,q}$  のように，番号が 1 ずつ減っていくことによって何回か同じ事を繰り返せば，実現出来る．

$$\begin{aligned} (1^\circ) \quad (p + q + 1)I_{p,q} - qbI_{p,q-1} &= (p + q + 1) \int t^p (at + b)^q dt - qb \int t^p (at + b)^{q-1} dt \\ &= \int t^p (at + b)^{q-1} ((p + q + 1)(at + b) - qb) dt = \int t^p (at + b)^{q-1} ((p + 1)(at + b) + qat) dt \\ &= \int ((p + 1)t^p (at + b)^q + qat^{p+1} (at + b)^{q-1}) dt = \int \frac{d}{dt} (t^{p+1} (at + b)^q) dt = t^{p+1} (at + b)^q . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2^\circ) \quad a(p + q + 1)I_{p,q} + pbI_{p-1,q} &= \int (a(p + q + 1)t^p (at + b)^q + pbt^{p-1} (at + b)^q) dt \\ &= \int (a(q + 1)t^p (at + b)^q + apt^p (at + b)^q + pbt^{p-1} (at + b)^q) dt \\ &= \int (a(q + 1)t^p (at + b)^q + pt^{p-1} (at + b)^{q+1}) dt = \int \frac{d}{dt} (t^p (at + b)^{q+1}) dt = t^p (at + b)^{q+1} . \blacksquare \end{aligned}$$

$$\boxed{6} \quad [1^\circ] \quad \int_0^\pi \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1-2a \cos x + a^2}} = \begin{cases} 2 & (|a| \leq 1) \\ \frac{2}{|a|} & (|a| > 1) \end{cases}$$

$$[2^\circ] \quad \int_0^1 \frac{x \log x \, dx}{(1+x)^4} = -\frac{1}{6} \left( \log 2 - \frac{1}{4} \right)$$

$$[1^\circ] \quad a=0 \text{ のとき}, \quad \int_0^\pi \sin x \, dx = \left[ -\cos x \right]_0^\pi = 2.$$

$$a \neq 0 \text{ のとき}, \text{ 与式} = \left[ \frac{\sqrt{1+a^2-2a \cos x}}{a} \right]_0^\pi = \frac{|a+1| - |a-1|}{a} = \begin{cases} 2 & (0 < a \leq 1, -1 \leq a < 0) \\ \frac{2}{|a|} & (|a| > 1) \end{cases}$$

$$[2^\circ] \quad \left( \frac{x \log x}{(x+1)^3} \right)' = \frac{(\log x + 1)(x+1)^3 - 3(x+1)^2 x \log x}{(x+1)^6} = \frac{\log x + 1}{(x+1)^3} - \frac{3x \log x}{(x+1)^4}$$

$$\therefore 3 \int \frac{x \log x \, dx}{(x+1)^4} = \int \frac{\log x \, dx}{(x+1)^3} + \int \frac{dx}{(x+1)^3} - \frac{x \log x}{(x+1)^3} = \underbrace{\int \frac{\log x \, dx}{(x+1)^3}}_{=\textcircled{1} \text{ とおく}} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x \log x}{(x+1)^3} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \textcircled{1} &= \int \log x \cdot \left( \frac{(x+1)^{-2}}{-2} \right) = -\frac{\log x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(x+1)^2} \\ &= -\frac{\log x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = -\frac{\log x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2} \left( \log x - \log(x+1) + \frac{1}{x+1} \right). \end{aligned}$$

(36) へ戻して,

$$3 \int \frac{x \log x \, dx}{(x+1)^4} = \frac{1}{2} \left( \frac{(x^2+2x) \log x}{(x+1)^2} - \log(x+1) + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) - \frac{x \log x}{(x+1)^3} := F(x) \text{ とおく.}$$

$$F(1) = \frac{1}{2} \left( -\log 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - \log 2 \right). \text{ 更に, } F(0) \text{ は広義積分になるので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0. \quad (37)$$

を用いて,  $\lim_{x \rightarrow +0} (x^2+2x) \log x = 0$  となるので,  $x \rightarrow +0$  のとき,  $F(x) \rightarrow \frac{1}{2} (0 - \log 1 + 1 - 1) - 0 = 0$ .

$$\therefore \int_0^1 \frac{x \log x \, dx}{(x+1)^4} = \frac{1}{3} \left( F(1) - \lim_{x \rightarrow +0} F(x) \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{4} - \log 2 \right). \quad \blacksquare$$

$$\boxed{7} \quad [1^\circ] \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi \quad (a < b)$$

$$[2^\circ] \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \pm \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad (|a| > 1, \pm \text{は } a \text{ の符号に一致する.})$$

$$[3^\circ] \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \tan x \, dx = \frac{\pi}{2} \log 2 \quad [4^\circ] \quad \int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha} \, dx = \frac{-1}{(1-\alpha)^2}$$

$$[1^\circ] \quad (x-a)(b-x) = \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 - \left( x - \frac{b+a}{2} \right)^2. \text{ だから, ここで } x - \frac{b+a}{2} = \frac{b-a}{2} \cos \theta \text{ とおく.}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{b-a}{2} \sin \theta. \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

|          |       |               |     |
|----------|-------|---------------|-----|
| $x$      | $a$   | $\rightarrow$ | $b$ |
| $\theta$ | $\pi$ | $\rightarrow$ | $0$ |

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = \sqrt{\left( \frac{b-a}{2} \right)^2 \sin^2 \theta} = \left| \frac{b-a}{2} \sin \theta \right| = \frac{b-a}{2} \sin \theta.$$

$$(\odot \quad b > a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$\therefore \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_{\pi}^0 \frac{-\frac{b-a}{2} \sin \theta}{\frac{b-a}{2} \sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi} d\theta = \pi.$$

[2°]  $x = \cos \theta$  とおく .

|          |       |               |     |
|----------|-------|---------------|-----|
| $x$      | $-1$  | $\rightarrow$ | $1$ |
| $\theta$ | $\pi$ | $\rightarrow$ | $0$ |

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi}^0 \frac{-\sin \theta d\theta}{(a-\cos \theta) \sin \theta} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a-\cos \theta} \quad (38)$$

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ とおくと , } \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \theta} = \frac{1+t^2}{2}$$

|          |     |               |          |
|----------|-----|---------------|----------|
| $\theta$ | $0$ | $\rightarrow$ | $\pi$    |
| $t$      | $0$ | $\rightarrow$ | $\infty$ |

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a-\cos \theta} = \int_0^{\infty} \frac{1}{a-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a+1)t^2 + (a-1)} = \frac{2}{a+1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{a-1}{a+1}} \quad (39)$$

ここで  $|a| > 1$  より ,  $\frac{a-1}{a+1} > 0$  だから ,  $t = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} u$  とおくと ,  $\frac{dt}{du} = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$

|     |     |               |          |
|-----|-----|---------------|----------|
| $t$ | $0$ | $\rightarrow$ | $\infty$ |
| $u$ | $0$ | $\rightarrow$ | $\infty$ |

$$\begin{aligned} \frac{2}{a+1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{a-1}{a+1}} &= \frac{2}{a+1} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} du}{\frac{a-1}{a+1}(u^2 + 1)} = \frac{2}{a+1} \frac{a+1}{a-1} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \frac{2}{a-1} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \left[ \tan^{-1} u \right]_0^{\infty} = \frac{2}{a-1} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{a-1} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{(a-1)^2}} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} & (a > 1) \\ -\frac{\pi}{\sqrt{(a-1)^2}} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} & (a < -1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} & (a > 1) \\ -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} & (a < -1) \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

(38), (39), (40) より , 結論を得る .

$$[3^{\circ}] y = \frac{\pi}{2} - x \text{ とおくと } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \\ \hline y & \frac{\pi}{2} & \rightarrow & 0 \\ \hline \end{array} \quad \tan x = \tan \left( \frac{\pi}{2} - y \right) = \cot y, \quad \frac{dx}{dy} = -1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cdot \cot y dy = \left[ y \log \sin y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y dy$$

ここで , (37) によって ,  $\left[ y \log \sin y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \log \sin \frac{\pi}{2} - \lim_{y \rightarrow +0} y \log \sin y = 0 - 0 = 0$ . 更に §34[例 3] によ

て ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y dy = -\frac{\pi}{2} \log 2$  だから ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \tan x dx = \frac{\pi}{2} \log 2$  を得る .

$$[4^{\circ}] x = e^{-t} \text{ とおくと } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & 0 & \rightarrow & 1 \\ \hline t & \infty & \rightarrow & 0 \\ \hline \end{array} \quad \frac{dx}{dt} = -e^{-t} \cdot \log x = -t, \quad x^{\alpha} = e^{-\alpha t}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\log x}{x^{\alpha}} dx &= \int_{\infty}^0 \frac{-t}{e^{-\alpha t}} (-e^{-t}) dt = - \int_0^{\infty} t e^{-(1-\alpha)t} dt = - \int_0^{\infty} t \cdot d \left( -\frac{e^{-(1-\alpha)t}}{1-\alpha} \right) \\ &= \left[ \frac{t e^{-(1-\alpha)t}}{1-\alpha} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{\infty} e^{-(1-\alpha)t} dt = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{(1-\alpha)t}} - 0 + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left[ e^{-(1-\alpha)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\alpha)e^{(1-\alpha)t}} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} (0 - e^0) = -\frac{1}{(1-\alpha)^2} \quad (\odot 1-\alpha > 0, \text{ ロピタルの定理.}) \blacksquare \end{aligned}$$

8  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\nu} dx \quad (0 < \nu < 2)$  は収束する。しかも,

(1°)  $1 < \nu < 2 \Rightarrow$  絶対収束.

(2°)  $0 < \nu \leq 1 \Rightarrow$  絶対収束でない.

最初に次の補題を示す.

$$b > 0 \text{ のとき, } \int_0^b \frac{dx}{x^\nu} < +\infty \iff \nu < 1 \quad (41)$$

$$a > 0 \text{ のとき, } \int_a^\infty \frac{dx}{x^\nu} < +\infty \iff \nu > 1 \quad (42)$$

$$\odot a > 0, b > 0 \text{ のとき, } \int_a^b \frac{dx}{x^\nu} = \begin{cases} \log b - \log a & (\nu = 1) \\ \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^{\nu-1}} - \frac{1}{a^{\nu-1}} \right) & (\nu \neq 1) \end{cases}$$

(41) について  $\nu = 1$  のとき,  $\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^b \frac{dx}{x^\nu} = \lim_{a \rightarrow +0} (\log b - \log a) = +\infty$  (発散)

$$\nu \neq 1 \text{ のとき, } \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^b \frac{dx}{x^\nu} = \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{1}{b^{\nu-1}} - \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a^{\nu-1}} \right)$$

この極限が存在 (有限確定値) するには  $\nu - 1 < 0$  でなければならない.

(42) について  $\nu = 1$  のとき,  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\nu} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\log b - \log a) = +\infty$  (発散)

$$\nu \neq 1 \text{ のとき, } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\nu} = \frac{1}{1-\nu} \left( \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{\nu-1}} - \frac{1}{a^{\nu-1}} \right)$$

この極限が存在 (有限確定値) するには  $\nu - 1 > 0$  でなければならない. (q.e.d.)

(1°) について  $\frac{\sin x}{x^\nu}$  は  $(0, \infty)$  において連続である.  $0 < b < \frac{\pi}{2}$  なる定数  $b$  をとれば,  $0 < x \leq b \left( < \frac{\pi}{2} \right)$  のとき,  $0 < \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{\sin x}{x} < 1$  だから,  $0 < \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| < \frac{1}{x^{\nu-1}}$ . 条件  $\nu - 1 < 1$  と (41) によって,

$\int_0^b \frac{dx}{x^{\nu-1}}$  は収束するから,  $\int_0^b \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$  は収束する.

次に,  $x > 0$  のとき  $\left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| \leq \frac{1}{x^\nu}$  で,  $\nu > 1$  だから (42) によって,  $\int_b^\infty \frac{dx}{x^\nu}$  は収束するから,

$\int_b^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx$  は収束する.

以上より,  $\int_0^b \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx + \int_b^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx = \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx$  は収束する.

(2°) について  $0 < x \leq 1$  では  $\frac{\sin x}{x^\nu}$  は連続である.  $\lim_{x \rightarrow +0} \left| \frac{\sin x}{x^\nu} - 0 \right| = \lim_{x \rightarrow +0} \left( |x^{1-\nu}| \left| \frac{\sin x}{x} \right| \right) = 0$

だから,  $x = 0$  では  $\frac{\sin x}{x^\nu} \equiv 0$  と定義すれば, 結局  $0 \leq x \leq 1$  で  $\frac{\sin x}{x^\nu}$  は連続であるから,

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\nu} dx$  は収束する.

次に  $1 \leq x < \infty$  のとき,  $1 < p < q$  なる  $p, q$  に対して,

$$\begin{aligned} \left| \int_p^q \frac{\sin x}{x^\nu} dx \right| &= \left| - \int_p^q \frac{(\cos x)'}{x^\nu} dx \right| = \left| \int_p^q \frac{(\cos x)'}{x^\nu} dx \right| = \left| \left[ \frac{\cos x}{x^\nu} \right]_p^q + \nu \int_p^q \frac{\cos x}{x^{\nu+1}} dx \right| \\ &= \left| \frac{\cos q}{q^\nu} - \frac{\cos p}{p^\nu} + \nu \int_p^q \frac{\cos x}{x^{\nu+1}} dx \right| \leq \left| \frac{\cos q}{q^\nu} \right| + \left| \frac{\cos p}{p^\nu} \right| + \nu \left| \int_p^q \frac{\cos x}{x^{\nu+1}} dx \right| \leq \frac{1}{q^\nu} + \frac{1}{p^\nu} + \nu \int_p^q \frac{1}{x^{\nu+1}} dx \\ &= \frac{2}{p^\nu} \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

従って, Cauchy の収束条件により  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\nu} dx$  は収束する.

以上により,  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\nu} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\nu} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\nu} dx$  は収束する.

しかし残念ながら,  $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx$  は収束しないことが以下によって示される.

$J := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx$  とおいたとき,  $x = n\pi + t$  と置換することによって,

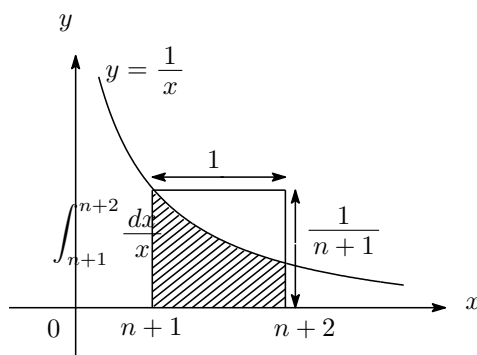
$J = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{(n\pi + t)^\nu} dt$  となる. ここで積分の平均値の定理<sup>\*13</sup>によって,

$0 < \exists \xi < \pi$  s.t.  $\int_0^\pi \frac{\sin t}{(n\pi + t)^\nu} dt = \frac{1}{(n\pi + \xi)^\nu} \int_0^\pi \sin t dt$  が成立して,

しかも  $(n\pi + \xi)^\nu < (n\pi + \pi)^\nu$  ( $0 < \nu \leq 1$ ) だから,

$\int_0^\pi \frac{\sin t}{(n\pi + t)^\nu} dt > \frac{1}{(n\pi + \pi)^\nu} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{\pi^\nu \cdot (n+1)^\nu} > \frac{2}{\pi^\nu \cdot (n+1)} > \frac{2}{\pi^\nu} \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x}$  を得る.

さて, 最後の不等式で  $\frac{1}{n+1} > \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x}$  を用いたが, それは, 下図より明らかであろう.



$$\text{i.e. } J = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx > \frac{2}{\pi^\nu} \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx &= \int_0^\pi \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx + \int_\pi^{2\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\nu} \right| dx \\ &> \frac{2}{\pi^\nu} \left( \int_{0+1}^{0+2} \frac{dx}{x} + \int_{1+1}^{1+2} \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{(n-1)+1}^{(n-1)+2} \frac{dx}{x} \right) \\ &= \frac{2}{\pi^\nu} \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi^\nu} \log(n+1) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

よって収束しない. ■

**9**  $\int_0^\infty \frac{x dx}{1 + x^6 \cdot \sin^2 x}$  は収束する.

これは被積分函数が有界でなくても, 無限区間の積分が収束する例である.

$x = n\pi$  とすると,  $n \rightarrow \infty$  のとき,  $\frac{x}{1 + x^6 \cdot \sin^2 x} = \frac{n\pi}{1 + (n\pi)^6 \cdot \sin^2(n\pi)} = n\pi \rightarrow \infty$  だから, 確かに被積分函数は有界でない.

$J_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x dx}{1 + x^6 \cdot \sin^2 x}$  とおくと,  $x = t + n\pi$  とおくと,  $\frac{dx}{dt} = 1$ ,

|     |        |               |            |
|-----|--------|---------------|------------|
| $x$ | $n\pi$ | $\rightarrow$ | $(n+1)\pi$ |
| $t$ | $0$    | $\rightarrow$ | $\pi$      |

<sup>\*13</sup> 本文 p.99 定理 3

$J_n = \int_0^\pi \frac{(t+n\pi) dt}{1+(t+n\pi)^6 \cdot \sin^2 t}$  となる．ここで、分母  $> 0$  で  $t+n\pi$  は連続だから、積分の平均値の定理により、

$$0 < \exists \xi < \pi \quad \text{s.t.} \quad J_n = (\xi+n\pi) \int_0^\pi \frac{dt}{1+(t+n\pi)^6 \cdot \sin^2 t} < (n+1)\pi \int_0^\pi \frac{dt}{1+(t+n\pi)^6 \cdot \sin^2 t}. \quad (43)$$

$$\left( \odot \xi < \pi, \frac{1}{1+(t+n\pi)^6 \cdot \sin^2 t} > 0 \right).$$

$0 \leq t \leq \pi$  において、 $(t+n\pi)^6 > (n\pi)^6$  によって、 $1+(t+n\pi)^6 \sin^2 t > 1+(n\pi)^6 \sin^2 t$  より、

$$\frac{1}{1+(t+n\pi)^6 \sin^2 t} < \frac{1}{1+(n\pi)^6 \sin^2 t} \quad \text{だから、}$$

$$(n+1)\pi \int_0^\pi \frac{dt}{1+(t+n\pi)^6 \sin^2 t} < (n+1)\pi \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \sin^2 t} \quad (44)$$

(43), (44) より、

$$J_n < (n+1)\pi \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \sin^2 t} \quad (45)$$

更に、 $\int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \sin^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^6}}$  である．

実際、 $F(t) = 1+(n\pi)^6 \sin^2 t$  とおくと、 $F\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = F\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$  だから、 $F(t)$  は  $t = \frac{\pi}{2}$  に関して対称である  $\therefore \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \sin^2 t} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \sin^2 t}$ ．  $u = \tan t$  とおくと、 $\cos^2 t = \frac{1}{1+u^2}$  より、

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} = 1+u^2. \quad \begin{array}{c|c|c|c} t & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 0 & \rightarrow & \infty \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \sin^2 t} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \sin^2 t} = 2 \int_0^\infty \frac{\frac{du}{1+u^2}}{1+(n\pi)^6 \frac{u^2}{1+u^2}} = 2 \int_0^\infty \frac{du}{1+(1+(n\pi)^6)u^2} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1+(n\pi)^6}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{1+(n\pi)^6}} \right]_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{1+(n\pi)^6}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^6}} \end{aligned}$$

$$\therefore (45) \text{ より, } J_n < (n+1)\pi \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \cdot \sin^2 t} = \frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1+(n\pi)^6}} \quad (46)$$

次に、 $\frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1+(n\pi)^6}} < \frac{1}{n^2}$  であることを示そう．

$$\begin{aligned} (n^2(n+1)\pi^2)^2 - (\sqrt{\phantom{x}}^2 = n^4(n+1)^2\pi^4 - (1+(n\pi)^6)) &= n^4\pi^4((n+1)^2 - (n\pi)^2) - 1 \\ &= n^4\pi^4(n+1+n\pi)(n+1-n\pi) - 1 = n^4\pi^4((\pi+1)n+1)((1-\pi)n+1) - 1 < 0 \end{aligned}$$

( $\odot$   $n=0$  のとき、 $n^4\pi^4((\pi+1)n+1)((1-\pi)n+1) - 1 = -1$  ,  $n \geq 1$  のとき、 $(1-\pi)n+1 < 0$ )

結局 (46) より、

$$J_n < (n+1)\pi \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^6 \cdot \sin^2 t} = \frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1+(n\pi)^6}} < \frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^6 \cdot \sin^2 x} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \cdots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} + \cdots < \underbrace{\int_0^\pi \frac{x dx}{1+x^6 \cdot \sin^2 x}}_{\text{有限確定値}} + \underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots}_{\frac{\pi^2}{6}}.$$

よって,  $\int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^6 \cdot \sin^2 x}$  は上に有界で, 被積分関数は  $> 0$  だから  $[0, \infty)$  で積分可能である. ■

**10**  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$  とおくと,  $(n-1)J_n = (n-3)J_{n-4}$ .

これから Wallis の公式のように,  $J_0, J_1, J_2$  を表す無限積を導くことができる. ( $J_3 = \frac{1}{2}$  を用いる)

<解答> \*14  $x = \sqrt{\sin \theta}$  とおく ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ).  $\sqrt{1-x^4} = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta$ .  $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2}(\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta$

$$\therefore J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin \theta)^{\frac{n}{2}}}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{2}(\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{\frac{n-1}{2}} d\theta.$$

$n \geq 4$  のとき,

$$\begin{aligned} 2J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{\frac{n-3}{2}} d(-\cos \theta) = \left[ -(\sin \theta)^{\frac{n-3}{2}} \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{\frac{n-5}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{n-3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (\sin \theta)^{\frac{n-5}{2}} - (\sin \theta)^{\frac{n-1}{2}} \right) d\theta = (n-3)(J_{n-4} - J_n) \therefore (n-1)J_n = (n-3)J_{n-4}. \end{aligned}$$

$$\text{次に, } J_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot \left[ -\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$(n-1)J_n = (n-3)J_{n-4}$  であつたから,

$$J_{4m+4} = \frac{4m+1}{4m+3} J_{4m} \Rightarrow J_{4m} = \frac{(4m-3)(4m-7) \cdots 5 \cdot 1}{(4m-1)(4m-5) \cdots 7 \cdot 3} J_0 = \prod_{k=1}^m \frac{4k-3}{4k-1} J_0 \quad (47)$$

$$J_{4m+3} = \frac{4m}{4m+2} J_{4m-1} \Rightarrow J_{4m+3} = \frac{(4m)(4m-4) \cdots 8 \cdot 4}{(4m+2)(4m-2) \cdots 10 \cdot 6} J_3 = \prod_{k=1}^m \frac{4k}{4k+2} J_3 \quad (48)$$

$$J_{4m+2} = \frac{4m-1}{4m+1} J_{4m-2} \Rightarrow J_{4m+2} = \frac{(4m-1)(4m-5) \cdots 7 \cdot 3}{(4m+1)(4m-3) \cdots 9 \cdot 5} J_2 = \prod_{k=1}^m \frac{4k-1}{4k+1} J_2 \quad (49)$$

$$J_{4m+1} = \frac{4m-2}{4m} J_{4m-3} \Rightarrow J_{4m+1} = \frac{(4m-2)(4m-6) \cdots 6 \cdot 2}{(4m)(4m-4) \cdots 8 \cdot 4} J_1 = \prod_{k=1}^m \frac{4k-2}{4k} J_1 \quad (50)$$

$$(48) \times (50) \text{ より, } J_{4m+1} \times J_{4m+3} = \frac{2}{4m+2} J_1 J_3 \quad (51)$$

$$(47) \times (49) \text{ より, } J_{4m} \times J_{4m+2} = \frac{1}{4m+1} J_0 J_2 \quad (52)$$

ところで  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき  $0 < \sin \theta < 1$  だから,

$$0 < (\sin \theta)^{\frac{4m+4-1}{2}} < (\sin \theta)^{\frac{4m+3-1}{2}} < (\sin \theta)^{\frac{4m+2-1}{2}} < (\sin \theta)^{\frac{4m+1-1}{2}} < (\sin \theta)^{\frac{4m-1}{2}}$$

\*14 この解答は, 「青空学園数学科・解析概論読書会」における「緑川 氏」の解答を若干修正しただけである.

そして,  $J_n = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{\frac{n-1}{2}} d\theta$  であつたから,

$$J_{4m+4} < J_{4m+3} < J_{4m+2} < J_{4m+1} < J_{4m} \\ \Rightarrow 1 < \frac{J_{4m+3}}{J_{4m+4}} < \frac{J_{4m+2}}{J_{4m+4}} < \frac{J_{4m+1}}{J_{4m+4}} < \frac{J_{4m}}{J_{4m+4}} = \frac{4m+3}{4m+1} \quad (53)$$

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{4m+3}}{J_{4m+4}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{4m+2}}{J_{4m+4}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{4m+1}}{J_{4m+4}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{4m}}{J_{4m+4}} = 1. \quad (54)$$

$$(50) \div (48) \text{ より, } \frac{J_{4m+1}}{J_{4m+3}} = \frac{J_1}{J_3} \prod_{k=1}^m \frac{(4k-2)(4k+2)}{(4k)^2}.$$

$$(54) \text{ より, } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{4m+1}}{J_{4m+3}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{J_{4m+1}}{J_{4m+4}}}{\frac{J_{4m+3}}{J_{4m+4}}} = 1 \text{ であるから,}$$

$$J_1 \left( \frac{\pi}{4} \right) = J_3 \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(4m)^2}{(4m-2)(4m+2)} = \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{\left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right)} \quad (55)$$

同様に, (47)  $\div$  (49) より,

$$\frac{J_{4m}}{J_{4m+2}} = \frac{J_0}{J_2} \prod_{k=1}^m \frac{(4k-3)(4k+1)}{(4k-1)^2} \quad (54) \text{ より, } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{4m}}{J_{4m+2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{J_{4m}}{J_{4m+4}}}{\frac{J_{4m+2}}{J_{4m+4}}} = 1 \text{ であるから,}$$

$$\frac{J_2}{J_0} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(4m-3)(4m+1)}{(4m-1)^2} = \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(m - \frac{3}{4}\right) \left(m + \frac{1}{4}\right)}{\left(m - \frac{1}{4}\right)^2} \quad (56)$$

$$(51) \div (52) \text{ において, } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{4m+1} J_{4m+3}}{J_{4m} J_{4m+2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{J_{4m+1}}{J_{4m+4}} \frac{J_{4m+3}}{J_{4m+4}}}{\frac{J_{4m}}{J_{4m+4}} \frac{J_{4m+2}}{J_{4m+4}}} = 1.$$

$$\text{従つて, } 1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{4m+1} J_{4m+3}}{J_{4m} J_{4m+2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{4m+1}{4m+2} \cdot \frac{2J_1 J_3}{J_0 J_2} \right) = \frac{2J_1 J_3}{J_0 J_2} \text{ 一方, } J_3 = \frac{1}{2} \text{ であつたから,}$$

$$J_0 J_2 = J_1. \quad (57)$$

$$(56) \times (57) \text{ 及び (55) より, } J_2^2 = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(m - \frac{3}{4}\right) \left(m + \frac{1}{4}\right)}{\left(m - \frac{1}{4}\right)^2} \times \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{\left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right)}.$$

$$\therefore J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{m}{m - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\left(m - \frac{3}{4}\right) \left(m + \frac{1}{4}\right)}{\left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right)}} \right).$$

(57)  $\div$  (56) より,

$$J_0^2 = \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{\left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right)} \div \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(m - \frac{3}{4}\right) \left(m + \frac{1}{4}\right)}{\left(m - \frac{1}{4}\right)^2} \\ = \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \left(m - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(m - \frac{3}{4}\right) \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{4}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore J_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{m \left(m - \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(m - \frac{3}{4}\right) \left(m - \frac{1}{2}\right) \left(m + \frac{1}{4}\right) \left(m + \frac{1}{2}\right)}} . \quad \blacksquare$$

**11**  $f(x)$  ,  $g(x)$  が  $[a, b]$  で積分可能ならば,

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \cdot \left( \int_a^b (g(x))^2 dx \right) \quad (\text{Schwarz の不等式})$$

但し,  $f(x)$  ,  $g(x)$  が連続ならば, 等号は  $f(x)$  ,  $g(x)$  の比が定数であるときに限って成り立つ .

$f(x)$  ,  $g(x)$  が  $[a, b]$  で積分可能だから, 実数  $u, v \neq 0$  について  $u \cdot f(x) + v \cdot g(x)$  も積分可能であり,  $(u \cdot f(x) + v \cdot g(x))^2 \geq 0$  だから, 本文 §34(4°) によって,  $\int_a^b (u \cdot f(x) + v \cdot g(x))^2 dx \geq 0$  .

$$\therefore u^2 \int_a^b (f(x))^2 dx + 2uv \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx + v^2 \int_a^b (g(x))^2 dx \geq 0 . \quad (58)$$

ここで, 恒等的に  $f(x) \equiv 0$  であるならば, Schwarz の不等式において等号部が成立している .

そうでなければ,  $\int_a^b (f(x))^2 dx > 0$  だから (58) は  $u$  の 2 次式と解釈できるから,

$$D/4 = v^2 \left( \left( \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 - \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \cdot \left( \int_a^b (g(x))^2 dx \right) \right) \leq 0 .$$

$v^2 > 0$  故,  $\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right) \cdot \left( \int_a^b (g(x))^2 dx \right)$  を得る . 等号は  $f(x), g(x)$  が連続ならば,  $u \cdot f(x) + v \cdot g(x) = 0$  のときに成立し, それは  $f(x) : g(x) = -v : u$  (定数) の時である .  $\blacksquare$

**12**  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  を  $[a, b]$  で積分可能として,

$$a_{\mu\nu} = \int_a^b f_{\mu}(x)f_{\nu}(x) dx$$

とおけば, Gram の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0 .$$

但し等号は  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  を  $[a, b]$  において連続ならば, それらが一次独立でない

(常に  $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$  ,  $(c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  なる定数が存在する) ときに限って成り立つ .

< 解 > \*15  $n$  個の変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の 2 次形式を次のように表す .

$$A(x, x) = \sum a_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu} , \quad a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} , \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)$$

\*15 本問は「高木貞治 著・代数学講義」p.323 と同じ . 定義も含めて確認していく .

すなわち,

$$a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

で,  $x_1x_2$  のような平方でない項の係数は  $2a_{12}$  のように数字係数 2 をつけておくのであるが, 同時にまた  $a_{12} = a_{21}$  において  $2a_{12}x_1x_2$  を  $a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1$  の様にも表す. この記法が重要である.

係数  $(a_{\mu\nu})$  の行列を略して二次形式の行列という. それは

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

で, 対称行列  $(a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$  である. そしてこの  $A$  の行列式  $|A|$  を判別式と呼ぶ.

この判別式は通常の二次の判別式と符号が反対である. 二つの変数  $x, y$  の二次形式  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = ax^2 + bxy + bxy + cy^2$  において, この定義に従えば判別式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

である. 本問においてもこの符号の差別に注意すること.

さて,

$$\begin{aligned} A(u, u) &\equiv \int_a^b (u_1f_1(x) + u_2f_2(x) + \cdots + u_nf_n(x))^2 dx \\ &= \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu}u_\mu u_\nu, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (59)$$

は変数  $(u)$  の二次形式である.

この二次形式の判別式

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  および区間  $[a, b]$  に関する Gram の行列式と呼ぶ. (59) から,  $A(u, u)$  は変数  $(u)$  の任意の実数値に対して, 決して負の値をとらないから, その判別式  $G \geq 0$  である.

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  が連続函数の場合, 被積分函数  $(u_1f_1(x) + u_2f_2(x) + \cdots + u_nf_n(x))^2$  は決して負にならないから, (59) が 0 になるのは,  $[a, b]$  において, 恒等的に  $u_1f_1(x) + u_2f_2(x) + \cdots + u_nf_n(x) \equiv 0$  となる場合に限る.

故に, 今  $(u)$  にある定数値  $(c)$  を与えたとすると,  $A(c, c) = 0$  になるのは,  $[a, b]$  において, 常に

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) \equiv 0$$

であるときに限る. このような関係が  $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$  のときに限って成り立つのは, 即ち,  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  が一次独立のときで, そのときは  $A(u, u) > 0$  で,  $G > 0$  である.

しかるに, もしも  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  が一次的に独立でないならば, 二次形式  $A(u, u)$  は

$u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$  以外の  $(u)$  のある値  $(c)$  に対して 0 になるから, それは低位の二次形式である. 従って,  $G = 0$  である. ■

13 Hermite の多項式  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$  に関して次の直交条件が成り立つ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \cdot \delta_{m,n}$$

ここで Kronecker のデルタ  $\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$  と定義される .

いくつかの補題を示しながら証明していこう .

$$0 \text{ 以上の整数 } j, k \text{ に対して, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x_j \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \right) = 0 \quad (60)$$

⊙  $\frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} = (-1)^k H_k(x) e^{-x^2}$  であり, “第 2 章末問題 3-(1)” により,  $H_k(x)$  は  $k$  次の多項式であるから,  $x_j \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} = (-1)^k \cdot \underbrace{x_j H_k(x)}_{j+k \text{ 次の多項式}} \cdot e^{-x^2} = (-1)^k \cdot \frac{x^j H_k(x)}{e^{x^2}}$  . よってロピタルの定理を繰り返し用いて,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x_j \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \right) = (-1)^k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^j H_k(x)}{e^{x^2}} = \cdots = 0$  .  
同様に,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x_j \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \right) = 0$  .

$$0 \text{ 以上の整数 } m \leq n \text{ に対して, } I(m, n) := \int_{-\infty}^{\infty} \left( x^m \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) dx = (-1)^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi} \cdot \delta_{m,n} \quad (61)$$

⊙ まず,  $I(0, n) = \sqrt{\pi} \cdot \delta_{0,n}$  である . 実際  $n = 0$  のとき, §35[例 6] によって

$$I(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

次に  $n \geq 1$  のとき,  $I(0, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) dx = \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$  (⊙ (60)).

$$I(m, n) = \left[ x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - m \int_{-\infty}^{\infty} \left( x^{m-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right) dx = -m \cdot I(m-1, n-1)$$

この漸化式を繰り返し用いて,

$$\begin{aligned} I(m, n) &= -m \cdot I(m-1, n-1) = (-m)(-(m-1))I(m-2, n-2) \\ &= \cdots = (-1)^m \cdot m! \cdot I(0, n-m) = (-1)^m \cdot m! \cdot \sqrt{\pi} \cdot \delta_{0, n-m} \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi} \cdot \delta_{m,n} \quad (\odot \delta_{0, n-m} = \delta_{m,n}) \end{aligned}$$

$$H_n(x) = (2x)^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 . \quad (62)$$

⊙ 帰納法により示す . 直接の計算により,  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = (-1) \left( \frac{d}{dx} e^{-x^2} \right) e^{x^2} = 2x$  .

$n$  のとき成立すると仮定して,

$$\begin{aligned}
 H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} \left( \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \right) e^{x^2} = (-1)^{n+1} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) e^{x^2} \\
 &= (-1)^{n+1} \frac{d}{dx} \left( (-1)^n H_n(x) e^{-x^2} \right) e^{x^2} \\
 &= -\frac{d}{dx} \left( ((2x)^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) e^{-x^2} \right) e^{x^2} \\
 &= - \left( (2^n n x^{n-1} + \cdots) e^{-x^2} + ((2x)^n + \cdots) (-2x) e^{-x^2} \right) e^{x^2} \\
 &= (2x)^{n+1} + \cdots
 \end{aligned}$$

では, いよいよ結論を示そう .

$m < n$  のとき,  $k \leq m < n$  に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = (-1)^n \cdot I(k, n) = 0 \quad (\odot) (61)$$

更に, (62) より  $H_m(x)$  は  $m$  次の多項式であるから,  $\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) dx = 0$  を得る .

$m = n$  のとき, (62) より  $H_n(x)$  は  $n$  次の多項式であり, 前述のように  $k < n$  のときは,

$\int_{-\infty}^{\infty} x^k H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$  であり,  $n$  次の項の係数は  $2^n$  であるから,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx &= 2^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n H_n(x) e^{-x^2} dx = (-2)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \\
 &= (-2)^n I(n, n) = (-2)^n \cdot (-1)^n \cdot n! \sqrt{\pi} = 2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi} \quad (\odot) (61)
 \end{aligned}$$

以上で証明は完了した . ■

**14** Laguerre の多項式  $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n \cdot e^{-x^2})$  に関して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = (n!)^2 \cdot \delta_{m,n}$$

ここで Kronecker のデルタ  $\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$  と定義される .

0 以上の整数  $m \leq n$  に対して,

$$I(m, n) := \int_0^{\infty} \left( x^m \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right) dx = (-1)^n \cdot (n!)^2 \cdot \delta_{m,n} \quad (63)$$

$$\odot \quad I(0, 0) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

さて,  $k < n$  のとき Leibnitz の規則により,

$$\frac{d^k}{dx^k} (x^n e^{-x}) = \sum_{i=0}^k \left( \binom{k}{i} (x^n)^{(i)} (e^{-x})^{(k-i)} \right) = \sum_{i=0}^k \left( (-1)^{k-i} \binom{k}{i} n(n-1) \cdots (n-i+1) x^{n-i} e^{-x} \right)$$

だから,  $\left[ \frac{d^k}{dx^k} (x^n e^{-x}) \right]_0^\infty = 0 - 0 = 0 \cdot \left( \odot \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{n-i} e^{-x}) = 0 \cdot \right)$

これを用いて,

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \left[ x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) \right]_0^\infty - m \int_0^\infty \left( x^{m-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) \right) dx \\ &= -m \int_0^\infty \left( x^{m-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) \right) dx = (-m) \cdot I(m-1, n-1). \end{aligned}$$

これを繰り返し用いて,  $I(m, n) = (-1)^m \cdot m! \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^n e^{-x}) dx$  を得る.

$$m < n \text{ のとき, } I(m, n) = (-1)^m \cdot m! \cdot \int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^n e^{-x}) dx = (-1)^m \cdot m! \cdot \left[ \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} \right]_0^\infty = 0.$$

$$I(n, n) = (-1)^n n! \int_0^\infty (x^n e^{-x}) dx = (-1)^n \cdot n! \cdot \Gamma(n+1) = (-1)^n \cdot (n!)^2.$$

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = e^x \sum_{i=0}^n \left( (-1)^{n-i} \binom{n}{i} n(n-1) \cdots (n-i+1) x^{n-i} e^{-x} \right) \\ &= (-x)^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \end{aligned} \quad (64)$$

$$\int_0^\infty x^k L_n(x) e^{-x} dx = \int_0^\infty \left( x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right) dx = I(k, n) = (-1)^n (n!)^2 \delta_{k,n} \quad (\odot (63))$$

従って (64) によって,  $m < n$  のときは,  $\int_0^\infty L_m(x) L_n(x) dx = 0$ .

$m = n$  のときは,  $\int_0^\infty L_n(x) L_n(x) dx = (-1)^n I(n, n) = (n!)^2$ . ■

**15** 区間  $0 < x < 1$  に属する  $x$  の値を二進法で書き表して, それを十進法によって読むときの値を  $f(x)$  とする. 但し, 2 の冪を分母とする有理数は有限二進法で書き表すものとする.

例えば  $x = \frac{1}{2}$  ならば, 二進法で  $x = (0.1)$ . 故に  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10}$ . また,  $x = \frac{1}{4}$  ならば, 二進法で  $x = (0.01)$ . 故に  $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{100}$ . 等々.

$$\text{この } f(x) \text{ について, } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{18}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$  において, 分割を  $n$  等分ではなく,  $2^n$  等分すると考える.

$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$ . まずは, 具体的に  $n = 3$  即ち  $2^3$  の分割を考える.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^3} \sum_{k=1}^{2^3} f\left(\frac{k}{2^3}\right) &= f\left(\frac{0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}{2^3}\right) + f\left(\frac{0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0}{2^3}\right) \\ &\quad + f\left(\frac{0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}{2^3}\right) + f\left(\frac{0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0}{2^3}\right) \\ &\quad + f\left(\frac{0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}{2^3}\right) + f\left(\frac{0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0}{2^3}\right) \\ &\quad + f\left(\frac{0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}{2^3}\right) + f\left(\frac{1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0}{2^3}\right) \end{aligned}$$

$f(x)$  の定義によれば, 2 進数を 10 進数に変えて,

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \frac{0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0}{10^3} + \frac{0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0}{10^3} \\
 &+ \frac{0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0}{10^3} + \frac{0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0}{10^3} \\
 &+ \frac{0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0}{10^3} + \frac{0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0}{10^3} \\
 &+ \frac{0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0}{10^3} + \frac{1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0}{10^3} \\
 &= \frac{1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0}{10^3} = 1 + 2^{3-1} \cdot \frac{10^3 - 1}{(10 - 1) \cdot 10^3}
 \end{aligned}$$

ここで,  $10^2, 10^1, 10^0$  の各係数に 4 が揃うのは, 2 進数表現において,  $2^0$  での係数が 1, 0 のパターンが交互に繰り返り現れ, それは全部で  $2^3 \cdot \frac{1}{2}$  回現れる. よって 1 の合計が  $2^{3-1} = 4$  となる. 同様に  $2^3$  回のうち,  $2^1$  の係数は 0 または 1 で, そのうち 1 は  $2^{3-1} = 4$  回出る.  $2^2$  の係数にしても同様である.

$$\therefore \frac{1}{2^3} \sum_{k=1}^{2^3} f\left(\frac{k}{2^3}\right) = \frac{1}{2^3} + 2^{-1} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^3\right)$$

よって  $n$  の場合に一般化すると,

$$\therefore \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} + 2^{-1} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \rightarrow \frac{1}{18} \quad (n \rightarrow \infty). \quad \blacksquare$$

## 第4章・章末問題と解答

**1** (Kummer)  $\sum u_n$  を正項級数とする.  $\{a_n\}$  を任意の正数列とする. 十分大なる  $n$  に関して常に

$$a_n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > k \quad (k > 0) \text{ ならば, } \sum u_n \text{ は収束する.}$$

また,  $a_n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0$  かつ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  が発散すれば,  $\sum u_n$  も発散する.

< 解 >  $n \geq N$  なる  $n$  に対して, 即ち  $n = N, N+1, N+2, \dots, N+p-1$  において漸化式は成立する. 各項は正であることに注意して, 辺々加えて

$$\begin{aligned} a_N \cdot u_N - \cancel{a_{N+1} \cdot u_{N+1}} &> k \cdot u_{N+1} \\ \cancel{a_{N+1} \cdot u_{N+1}} - \cancel{a_{N+2} \cdot u_{N+2}} &> k \cdot u_{N+2} \\ &\dots\dots > \dots \\ \cancel{a_{N+p-1} \cdot u_{N+p-1}} - a_{N+p} \cdot u_{N+p} &> k \cdot u_{N+p} \end{aligned}$$

+) \_\_\_\_\_

$$a_N \cdot u_N - a_{N+p} \cdot u_{N+p} > k \cdot (u_{N+1} + u_{N+2} + \dots + u_{N+p}) \text{ を得る.}$$

$a_n > 0, u_n > 0$  だから,  $a_N \cdot u_N > 0$  により,

$$a_N \cdot u_N > a_N \cdot u_N - a_{N+p} \cdot u_{N+p} > k \cdot (u_{N+1} + u_{N+2} + \dots + u_{N+p})$$

即ち,

$$\frac{a_N \cdot u_N}{k} > u_{N+1} + u_{N+2} + \dots + u_{N+p} \text{ を得る.}$$

つまり正項級数  $\sum u_n$  において, 或る番号  $N$  以上の任意の和が有界だから,  $\sum u_n$  は収束する.

後半部は,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n+1}}}$$

と,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  が発散することにより,  $\sum u_n$  は発散する<sup>\*16</sup>. ■

**2** 次の冪級数の収束半径 ( $r$ ) を求めよ.

$$(1^\circ) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$(2^\circ) \sum a^{n^2} x^n$$

$$< \text{解} > (1^\circ) a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \text{ とおく. } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)!^2}{2(n+1)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^2}{(2 + \frac{2}{n})(2 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{4}. \quad \therefore \frac{1}{r} = \frac{1}{4} \text{ より } r = 4.$$

$$(2^\circ) a_n = a^{n^2} \text{ とおく. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^{2n+1} = \begin{cases} 0 & (|a| < 1) \quad \therefore r = \infty \\ 1 & (|a| = 1) \quad \therefore r = 1 \\ \infty & (|a| > 1) \quad \therefore r = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

<sup>\*16</sup> 本文 p.150 収束の判定法 (v)(2°) による.

**3**  $a_0 > a_1 > \cdots > a_n > \cdots \rightarrow 0$  ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$$

は収束する．但し，第一の級数に関して， $x = 2k\pi$  のときは疑問である．

< 解 > まず全ての自然数  $n$  に対して， $a_n > 0$  である．

⊙ある番号  $N$  で  $a_N = 0$  であると仮定すると，この番号以降は  $\{a_n\}$  が単調減少であるから， $0 = a_N > a_{N+1} > a_{N+2} > \cdots$  である． $a_{N+1} < 0$  であったから， $\varepsilon = -a_{N+1} > 0$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  により，十分大なる  $n(> N+1)$  について， $a_{N+1} < a_n < -a_{N+1}$ ．これは， $\{a_n\}$  が単調減少であることに反する．

次に，

$$\begin{aligned} & (1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)) + i(0 + \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{-2i \sin \frac{(n+1)x}{2} \cdot e^{\frac{(n+1)x}{2}}}{-2i \sin \frac{x}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cdot e^{\frac{inx}{2}}}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left( \cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right) \end{aligned}$$

によって，

$$\begin{aligned} 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cdot \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \\ 0 + \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{を得る．} \end{aligned}$$

従って， $x$  を固定すると，

$$\begin{aligned} |1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)| &< \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \\ |0 + \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)| &< \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} . \end{aligned}$$

さて，Abel の級数変形公式<sup>\*17</sup>によって  $m > n$  に対して，

$$\begin{aligned} |a_n \cos(nx) + \cdots + a_m \cos(mx)| &< \frac{2a_n}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \rightarrow 0 \\ |a_n \sin(nx) + \cdots + a_m \sin(mx)| &< \frac{2a_n}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

となるので，与えられた級数は収束する．

$x = 2k\pi$  のとき， $\cos(nx) = 1$  だから， $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は，必ずしも収束しない．例えば  $a_n = \frac{1}{n+1}$  のときは発散する．■

\*17 “解析概論” 本文 p.154 参照．

4  $a_n > 0$  で  $a_n \rightarrow 0$  とする . もしも  $\sum a_n$  が発散すれば ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m (1 - a_n) = 0$$

< 解 > 以下 ,  $e^x := \exp(x)$  で表す .

まず全ての実数  $x$  に対して ,  $1 - x \leq \exp(-x)$  である .

( $\odot$   $y = \exp(-x)$  の  $x = 0$  における接線は  $y = -x + 1$  であり ,  $y = \exp(-x)$  は下に凸であるから .)  $a_n > 0$  ,  $a_n \rightarrow 0$  により , 十分大なる  $n$  に対して  $0 < a_n < 1$  として良い .

$$\prod_{n=1}^m (1 - a_n) \leq \prod_{n=1}^m \exp(-a_n) = \exp\left(\sum_{n=1}^m \exp(-a_n)\right) = \frac{1}{\exp\left(\sum_{n=1}^m a_n\right)} .$$

仮定により  $a_n > 0$  なので ,  $m \rightarrow \infty$  のとき  $\sum_{n=1}^m a_n \rightarrow +\infty$  だから ,  $\frac{1}{\exp\left(\sum_{n=1}^m a_n\right)} \rightarrow 0$  . ■

5  $|q| < 1$  ,  $Q_1 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n})$  ,  $Q_2 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2^{2n-1}})$  ,  $Q_3 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2^{2n-1}})$  とすれば ,  $Q_1 Q_2 Q_3 = 1$  .

(考え方) 絶対収束性によって , 項を掛ける順番が任意に変更出来ること , 各  $Q_1, Q_2, Q_3$  には , 全ての偶数と奇数が現れること , 偶数は “  $2^m \cdot (\text{奇数})$  ” と一意に表される , 等注意到する .

$Q_2$  と  $Q_3$  の積において , 最初に  $(1 + q^{2^{2n-1}}) \times (1 - q^{2^{2n-1}})$  を組み合わせて ,  $(1 - q^{2^{2(2n-1)}})$  を得る . これに対応した  $Q_1$  の項として ,  $(1 + q^{2^{2(2n-1)}})$  が唯一つ存在して , これを組み合わせる .

ここまでで ,  $(1 - q^{2^{2(2n-1)}}) \cdot (1 + q^{2^{2(2n-1)}}) = (1 - q^{2^{2^2(2n-1)}})$  を得る .

次に  $Q_1$  内の項の内 ,  $(1 + q^{2^{2(2n-1)}})$  ,  $(1 + q^{2^{2^3(2n-1)}})$  ,  $(1 + q^{2^{2^4(2n-1)}})$  ,  $\dots$  ,  $(1 + q^{2^{2^N(2n-1)}})$  ,  $\dots$  との積を取っていくと , 順に ,

$$(1 - q^{2^{2^3(2n-1)}}) \rightarrow (1 - q^{2^{2^4(2n-1)}}) \rightarrow (1 - q^{2^{2^5(2n-1)}}) \rightarrow \dots \rightarrow (1 - q^{2^{2^N(2n-1)}}) \rightarrow \dots$$

という項が次々に生じる .  $|q| < 1$  だったから ,  $N \rightarrow \infty$  のとき ,  $(1 - q^{2^{2^N(2n-1)}}) \rightarrow 1$  となる . この操作を全ての奇数に対して行えば ,  $Q_1 Q_2 Q_3 = 1$  を得る .

< 解 > 絶対収束性によって , 項を掛ける順番が任意に変更出来ることに注意する .

$$Q_0 := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2^n}) = \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \right) \cdot \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) \right) \neq 0$$

を考える .

$$\begin{aligned} Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 &= \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2^n}) \right) \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2^n}) \right) \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2^{2n-1}}) \right) \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2^{2n-1}}) \right) \\ &= \left( \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2^n}) \right) \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2^{2n-1}}) \right) \right) \left( \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2^n}) \right) \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2^{2n-1}}) \right) \right) \\ &= \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \right) \left( \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) \right) = Q_0 . \end{aligned}$$

$Q_0 \neq 0$  で両辺を割って ,  $Q_1 Q_2 Q_3 = 1$  を得る . ■

6  $|q| < 1$  ならば,

$$\frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} + \cdots = \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^4}{1-q^6} + \cdots$$

< 解 >

$$\begin{array}{ccccccc} q, & q^2, & q^3, & q^4, & \cdots \\ q^3, & q^6, & q^9, & q^{12}, & \cdots \\ q^5, & q^{10}, & q^{15}, & q^{20}, & \cdots \\ q^7, & q^{14}, & q^{21}, & q^{28}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

左図において  $(i, j)$  成分は,  $q^{(2i-1)j}$  である. 任意の正の整数  $k$  に対して,  $k = (2i-1)j$  となる  $(i, j)$  の個数は  $k$  を越えない.

よって, 左の 2 重数列で作った 2 重級数の絶対値の和  $S$  は,

$$|q| + 2|q|^2 + 3|q|^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k|q|^k \text{ を越えない.}$$

更にダランベールの判定法により,

$$\frac{(k+1)|q|^{k+1}}{k|q|^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)|q| \rightarrow |q| < 1 \quad (k \rightarrow \infty)$$

だから, 収束する. よって, 上図から作られた 2 重級数は絶対収束するので, 加える順序に関係なく同一の値に収束する.

上図において, 第 1 行の和 + 第 2 行の和 + 第 3 行の和 +  $\cdots$  を考えると,

$$(q + q^2 + q^3 + \cdots) + (q^3 + q^6 + q^9 + \cdots) + (q^5 + q^{10} + q^{15} + \cdots) + \cdots = \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} + \cdots$$

第 1 列の和 + 第 2 列の和 + 第 3 列の和 +  $\cdots$  を考えると,

$$(q + q^3 + q^5 + \cdots) + (q^2 + q^6 + q^{10} + \cdots) + (q^3 + q^9 + q^{12} + \cdots) + \cdots = \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} + \cdots$$

これらの結果が一致するから, 結論を得る. ■

7 原始函数が冪級数によって与えられる例.

$$\begin{array}{ll} (1) \int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \cdots & (2) \int e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \cdots \\ (3) \int \frac{e^x}{x} dx = \log x + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \cdots \end{array}$$

< 解 > (1)  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ . 全ての  $x$  で一様収束. そして  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  も  $x = 0$  を含めて (このとき,  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ ) 一様収束.  $\therefore \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$  は項別積分可能.

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{\sin x}{x} dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \cdots \end{aligned}$$

$$(2)(3) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ において,}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \quad \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \text{ である. 前者は“全ての実数 } x \text{”で, 後者は“} x \neq 0 \text{”で}$$

様収束する．従って，いずれも項別積分可能であり，

$$\int e^{-x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{2n} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) .$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \frac{1}{x} + \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} dx = \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int x^{n-1} dx = \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^n}{n} . \blacksquare$$

**8** 積分記号下での微分によって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

が得られる．

< 解 > \*18

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{at}} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{x^2}{a}} dx = 2\sqrt{a} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{at}} \frac{dx}{a+x^2}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \pi a^{-\frac{1}{2}} .$$

左辺は一樣収束なので， $a$  に関する微分と， $t \rightarrow \infty$  との順序が交換可能である．

ここで両辺を  $a$  の函数として  $n$  回微分すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} a^{-\frac{2n+1}{2}} . \quad (65)$$

を得る．以下，帰納法で証明する．

$n=1$  のとき，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a+x^2} &= \pi a^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{d}{da} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a+x^2} \right) = \pi \frac{d}{da} \left( a^{-\frac{1}{2}} \right) \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{da} \left( \frac{1}{a+x^2} \right) dx &= \pi \left( -\frac{1}{2} \right) a^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{a+x^2} dx = -\frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a+x^2} &= \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} . \end{aligned}$$

となり成立する．

$n$  のとき，(65) が成立すると仮定して， $a$  で微分すると，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(n+1)dx}{(a+x^2)^{n+2}} &= \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \left( -\frac{2n+1}{2} \right) a^{-\frac{2n+3}{2}} \\ \therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+2}} &= \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2(n+1)} a^{-\frac{2n+3}{2}} \end{aligned}$$

よって  $n+1$  でも成立するから，(65) は成立する．

\*18 以下の解は，“青空学園数学科・「南海」先生”による．

(65) で,  $a = 1$  とすると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \quad \text{を得る.} \blacksquare$$

9

$$\int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx = (b-a)\sqrt{\pi}, \quad (a > 0, b > 0).$$

< 解 > \*19  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . \*20

⊙ 重積分による解法.  $G_N = [0, N] \times [0, N]$  とすると,

$$I_N := \iint_{G_N} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^N e^{-y^2} dy \int_0^N e^{-x^2} dx = \left( \int_0^N e^{-x^2} dx \right)^2.$$

一方,  $\mathbb{R}^2$  において円板  $x^2 + y^2 \leq R^2$  の第一象限にある部分を  $D_R$  とすると, 極座標で,

$$J_R := \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4} \int_0^{R^2} e^{-t} dt = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

$$\therefore \lim_{R \rightarrow \infty} J_R = \frac{\pi}{4}. \quad J_N < I_N < J_{\sqrt{2}N} \quad \text{だから, はさみうちの原理より,} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{よって, } \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ である.}$$

$$\text{変数 } x \text{ を } \alpha x \text{ に変えると, } 2\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

左辺は一様収束するので, 両辺を  $\alpha$  で積分しその順序を変えてもよい. 故に,

$$(b-a)\sqrt{\pi} = \int_a^b \left( 2\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx \right) d\alpha = \int_0^{\infty} \left( \int_a^b 2\alpha e^{-\alpha^2 x^2} d\alpha \right) dx$$

$\beta = \alpha^2$  と変換して,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( \int_a^b 2\alpha e^{-\alpha^2 x^2} d\alpha \right) dx &= \int_0^{\infty} \left( \int_{a^2}^{b^2} e^{-\beta x^2} d\beta \right) dx = \int_0^{\infty} \left[ -\frac{1}{x^2} e^{-\beta x^2} \right]_{a^2}^{b^2} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left( -\frac{1}{x^2} (e^{-b^2 x^2} - e^{-a^2 x^2}) \right) dx \end{aligned}$$

$\frac{1}{x} = y$  と変換して,

$$\int_0^{\infty} \left( -\frac{1}{x^2} (e^{-b^2 x^2} - e^{-a^2 x^2}) \right) dx = \int_{\infty}^0 \left( e^{-\frac{b^2}{y^2}} - e^{-\frac{a^2}{y^2}} \right) dy = \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{a^2}{y^2}} - e^{-\frac{b^2}{y^2}} \right) dy \quad \blacksquare$$

10

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-(x^2 + \frac{a^2}{x^2})} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}, \quad (a > 0). \quad (2) \int_0^{\infty} e^{-(x - \frac{a}{x})^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (a > 0).$$

\*19 以下の解は, “青空学園数学科・「南海」先生” による. \*20 共立講座 21 世紀の数学 1 「微分積分」黒田成俊 (著) p.369 例 10.18

< 解 > (1)  $\int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \int_0^\infty e^{-(x^2-2a+\frac{a^2}{x^2})} dx = e^{2a} \int_0^\infty e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})} dx$  によって,

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+\frac{a^2}{x^2})} dx = e^{-2a} \int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a} . \quad (\odot) \quad (2))$$

(2)  $\int_0^\infty \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx$  を計算するのに,  $x - \frac{a}{x} = u$  と置き換えて,  $x \rightarrow +0$  のとき  $u \rightarrow -\infty$ ,

$x \rightarrow +\infty$  のとき  $u \rightarrow +\infty$  で,  $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{a}{x^2}$  により,

$$\int_0^\infty \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \cdots \textcircled{1}$$

ここで  $a > 0$  のとき区間  $(0, +\infty)$  において  $\left(1 + \frac{a}{x^2}\right) e^{-(x-\frac{a}{x})^2} > e^{-(x-\frac{a}{x})^2} > 0$  であり,  $\textcircled{1}$  によって積分  $\int_0^\infty \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx$  が収束するから,  $\int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx$  は一様収束する.

次に,  $\int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx := J(a)$  ( $a > 0$ ) として, 導関数  $J'(a)$  を考える. 積分が一様収束することから, 微分と積分の順序を入れ替えてもよいので,

$$\begin{aligned} J'(a) &= \frac{d}{da} \int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \int_0^\infty \frac{d}{da} \left( e^{-(x-\frac{a}{x})^2} \right) dx = \int_0^\infty -2 \left( x - \frac{a}{x} \right) \left( -\frac{1}{x} \right) e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx \\ &= 2 \int_0^\infty \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right) e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = 2 \left( \int_0^\infty \left( 1 + \frac{a}{x^2} \right) e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx - 2 \int_0^\infty \frac{a}{x^2} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx \right) \\ &= 2 \left( \int_0^\infty \left( 1 + \frac{a}{x^2} \right) e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx - 2 \int_0^\infty \left( 1 + \frac{a}{x^2} \right) e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx + 2 \int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx \right) \\ &= 2 \left( \sqrt{\pi} - 2\sqrt{\pi} + 2 \int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx \right) = -2\sqrt{\pi} + 4J(a) \end{aligned}$$

$\therefore J'(a) - 4J(a) = -2\sqrt{\pi} \cdots \textcircled{2}$  この微分方程式を解けば,  $J(a) = \int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx$  が求まることになる.

両辺を  $a$  で微分して  $J''(a) - 4J'(a) = 0$  より,  $\frac{J''(a)}{J'(a)} = 4$  から  $\log |J'(a)| = 4a + c$ ,  $J'(a) = Ce^{4a} \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$  において,  $a \rightarrow +0$  として,  $J'(0) = -2\sqrt{\pi} + 4J(0) = -2\sqrt{\pi} + 4 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = -2\sqrt{\pi} + 2\sqrt{\pi} = 0$  よつ

て  $\textcircled{3}$  から  $C = 0$ ,  $\therefore J'(a) = 0$ .  $\textcircled{2}$  から  $J(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .  $\therefore \int_0^\infty e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . ■

$$\boxed{11} \quad (1) \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} \quad (2) \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

< 解 > (1)  $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  の証明<sup>\*21</sup>

ド・モアブルの定理と二項定理によって  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$  を展開して  $\cos n\theta + i \sin n\theta = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cos^{n-l} \theta (i \sin \theta)^l$   
 $l$  が奇数の場合を考えて虚部を比較すると,

$$\begin{aligned} i \sin n\theta &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta (i \sin \theta) + \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta (i \sin \theta)^3 + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta (i \sin \theta)^5 + \cdots \\ &= i \left( \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \cdots \right) \\ &= \sin^n \theta \left( \binom{n}{1} \cot^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \cot^{n-3} \theta + \binom{n}{5} \cot^{n-5} \theta - \cdots \right) \end{aligned}$$

<sup>\*21</sup> 青空学園数学科: <http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwaN/taiwaNch04/node45.html> より.

ここで,  $n = 2m + 1$  とする.  $\theta = \frac{k\pi}{2m+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) を代入する. このとき「左辺 =  $\sin n\theta = 0$ ,  $\sin \theta \neq 0$ 」よってこれらの  $\theta$  に関して,

$$0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m} \theta - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} \theta + \binom{2m+1}{5} \cot^{2m-4} \theta - \dots$$

が成り立つ. 今  $t = \cot^2 \theta$  とおくと,  $\binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} + \binom{2m+1}{5} t^{m-2} - \dots = 0$ . 従って  $t = \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) は, この  $m$  次方程式の  $m$  個の根である. 根と係数の関係を用いて  $m-1$  次の係数をみると,

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = -\frac{-\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

さて,  $\sin x < x < \tan x$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ) だから  $\sin^2 x < x^2 < \tan^2 x$  逆数をとって  $\frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{x^2} > \cot^2 x$ .  $\therefore 1 + \cot^2 x > \frac{1}{x^2} > \cot^2 x$   $x = \frac{k\pi}{2m+1}$  として,  $1 + \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} > \frac{(2m+1)^2}{k^2 \pi^2} > \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}$  これを  $k = 1, 2, \dots, m$  について加えると  $\textcircled{1}$  により,  $m + \frac{m(2m-1)}{3} > \sum_{k=1}^m \frac{(2m+1)^2}{k^2 \pi^2} > \frac{m(2m-1)}{3}$ . 各辺に  $\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$  をかけると,  $\pi^2 \left( \frac{m}{(2m+1)^2} + \frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2} \right) > \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} > \pi^2 \cdot \frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2}$  ここで  $m \rightarrow \infty$  をとると,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2} = \frac{1}{6}$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{(2m+1)^2} + \frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2} \right) = \frac{1}{6}$  だから  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  は収束して,  $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$  である. ■

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ の証明}^{*22}$$

任意の  $0 < v < u < 1$  に対し, 有界閉区間  $[v, u]$  上で  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  は  $\frac{1}{1-x}$  に一様収束し, また  $\log x$  は  $[v, u]$  上で有界だから,  $\frac{\log x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \log x$  は  $[v, u]$  上で一様収束するから,  $[v, u]$  上で項別積分可能である.  $\int_v^u x^n \log x dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x \right]_v^u - \frac{1}{n+1} \int_v^u x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_v^u$  であるから, 項別積分の結果は  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$  により,  $\int_v^u \frac{\log x}{1-x} dx = \left[ -\log x \cdot \log(1-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \right]_v^u$ . 広義積分  $\int_0^1 \log x dx = \left[ x \log x - x \right]_0^1 = -1$ .  $^{*23}$  となるから, 広義積分  $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$  は, 下端 0 については収束する. また  $\log x = \log(1 - (1-x)) = -\left( (1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 + \dots \right)$  だから,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\log x}{1-x} = -1$  であり, 積分の上端の近傍では被積分関数は有界であり広義積分ではない. 以上によって  $\lim_{v \rightarrow +0, u \rightarrow 1-0} \int_v^u \frac{\log x}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$  となる. また  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \log x \log(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\log x}{1-x} (1-x) \log(1-x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} \log x \log(1-x) = \lim_{x \rightarrow +0} x \log x \frac{\log(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} x \log x \frac{\log(1-x) - \log 1}{x-0} = 0$  である. さらに,  $h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  だから  $h(x)$  は一様収束するので, その和は  $[0, 1]$  上で連続である.  $\therefore \lim_{u \rightarrow 1-0, v \rightarrow +0} \left[ h(x) \right]_v^u = h(1) - h(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  である. 以上により結論を得る. ■

(2)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  の証明

$^{*22}$  東京大学出版, 基礎数学 7 解析演習 p.199 問 6.2.3 (1) より.  $^{*23} \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} x(x-1) \frac{\log x - \log 1}{x-1} = 0 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{1} = 0$ .

$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} := s$  ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} := t$  とおく .  $s$  は絶対収束だから項の順番を入れ替えて ,

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right) + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \right) \\ &= \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right) + \frac{1}{2^2} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right) = t + \frac{s}{4} \end{aligned}$$

より  $t = \frac{\pi^2}{8}$  を得る . ■

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12} \text{ の証明}$$

(1) と同様にして広義積分の項別積分が可能である .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n \log x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots = s - 2t = \frac{\pi^2}{6} - 2 \cdot \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

である . ■

**12**  $a > 0$  ,  $b > 0$  とすれば

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \cdots$$

< 解 >  $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$  が存在すること

$$f(x) := \frac{x^{a-1}}{1+x^b} \text{ とおくと ,}$$

(i)  $a \geq 1$  のとき ,  $f(x)$  は  $0 \leq x \leq 1$  において連続だから  $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$  は存在する .

(ii)  $0 < a < 1$  のとき ,  $f(x)$  は  $0 < x \leq 1$  において連続である . 一方 ,  $0 < \alpha < 1$  なる  $\alpha$  に対して ,  
 $0 < \int_1^\alpha \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx < \int_1^\alpha x^{a-1} dx = \frac{1}{a} (1 - \alpha^a) < \frac{1}{a}$  . が成立するので ,  $\int_1^\alpha \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$  は  $\alpha$  に無関係に有界である .

次に  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$  の時 ,

$$\left| \int_{\alpha_1}^1 f(x) dx - \int_{\alpha_2}^1 f(x) dx \right| = \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^{a-1} dx \right| \leq \frac{1}{a} (\alpha_2^a - \alpha_1^a) \rightarrow 0 \quad (\alpha_2 - \alpha_1 \rightarrow 0) .$$

従って広義積分の定義により  $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$  が存在する .

“等号” 成立の証明

$$S_n := 1 - x^b + x^{2b} - \cdots + (-1)^n x^{nb} = \frac{1 - ((-1)x^b)^{n+1}}{1 - (-x^b)} = \frac{1}{1+x^b} + (-1)^n \cdot \frac{x^{b(n+1)}}{1+x^b} .$$

各辺に  $x^{a-1}$  を掛けて ,

$$\frac{x^{a-1}}{1+x^b} = x^{a-1} \cdot S_n - (-1)^n \cdot \frac{x^{a-1} x^{b(n+1)}}{1+x^b} = x^{a-1} (1 - x^b + x^{2b} - \cdots + (-1)^n x^{nb}) + (-1)^{n+1} .$$

$$\frac{x^{b(n+1)+a-1}}{1+x^b}.$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx &= \int_0^1 x^{a-1} dx - \int_0^1 x^{a+b-1} dx + \int_0^1 x^{a+b-1} dx - \cdots + (-1)^n \int_0^1 x^{a+nb-1} dx \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{b(n+1)+a-1}}{1+x^b} dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{a+nb} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{b(n+1)+a-1}}{1+x^b} dx \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

さて, ここで  $0 < \int_0^1 \frac{x^{b(n+1)+a-1}}{1+x^b} dx < \int_0^1 x^{b(n+1)+a-1} dx = \frac{1}{b(n+1)+a}$  . だから  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\frac{1}{b(n+1)+a} \rightarrow 0 \text{ により, } \left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{b(n+1)+a-1}}{1+x^b} dx \right| < \frac{1}{b(n+1)+a} \rightarrow 0.$$

よって ① において  $n \rightarrow \infty$  として,  $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \cdots$  を得る. ■