第1章・章末問題と解答

1 $a_1 > b_1 > 0\,; a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$, $b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ とすれば，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は同一の極限値に収束する．この極限値を a_1 , b_1 の**算術幾何平均**という (Gauss).

＜解答＞数学的帰納法と相加平均 $\geqq$ 相乗平均により

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1} < b_n < \cdots < a_n < a_{n-1} < \cdots < a_2 < a_1 \qquad \text{が成立する．}$$

$\because$数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $a_n > 0$, $b_n > 0$. 従って相加平均 $\geqq$ 相乗平均により $\dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \geqq \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}$. $\therefore\ a_n \geqq b_n$. 等号が成立するのは，$a_{n-1} = b_{n-1}$ のときだが，それは仮定 $a_1 \fallingdotseq b_1$ に反する．$\therefore\ a_n > b_n$.

次に，$a_1 - a_2 = a_1 - \dfrac{a_1 + b_1}{2} = \dfrac{a_1 - b_1}{2} > 0$ $(\because a_1 > b_1)$ $\therefore a_1 > a_2$.

${b_1}^2 - {b_2}^2 = {b_1}^2 - a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot (b_1 - a_1) < 0$. $(\because a_1 > b_1$かつ $b_1 > 0)$ $\therefore$ $b_1 < b_2$. 以上を合わせて $b_1 < b_2 < a_2 < a_1$.

$n = k$ のとき $b_{k-1} < b_{k+1} < a_{k+1} < a_{k-1}$ と仮定する．今やったことと同様にして $n = k + 1$ のとき $b_k < b_{k+2} < a_{k+2} < a_k$ が成立する．

つまり $\{a_n\}$ は狭義単調減少で下に有界，$\{b_n\}$ は狭義単調増加で上に有界だから，いずれも収束する．

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b$ は有限確定である．さらに，$a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$ の両辺の極限値をとれば，$a = \dfrac{a+b}{2}$ $\therefore a = b$. i.e. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$(有限確定値). □

2 $a > 0$, $b > 0\,; a_1 = \dfrac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = \sqrt{a_1 \cdot b}$. 一般に，$a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$, $b_n = \sqrt{a_n \cdot b_{n-1}}$ とすれば，$l = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が存在する．

[1°] $|a| < b$ のとき $a = b\cos x$, $-\pi < x < \pi$ と置けば，$l = b \cdot \dfrac{\sin x}{x}$.

[2°] $a > b > 0$ のとき $a = b\cosh x$ と置けば，$l = b \cdot \dfrac{\sinh x}{x}$.

＜解答＞ $a = b$ のときは，帰納法により $a_n = a = b = b_n$ であることが直ぐ解るので $l = a = b$ である．

よって，まず $a > b$ とする．$a_0 = a, b_0 = b$ として $b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1}$ となることを帰納法で示す．まず，$b_0 < a_0 \Rightarrow b_0 < \dfrac{b_0 + a_0}{2} < a_0 \Rightarrow b_0 < a_1 < a_0 \cdots$ ① である．

$$\begin{aligned}
\therefore\ \ b_0 &= \sqrt{b_0}\sqrt{b_0} \\
&< \sqrt{b_0}\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1 b_0} \quad (\because b_0 < a_1\text{であった}) \\
&= b_1 \qquad\qquad (\because b_1\text{の定義そのもの}) \\
&< \frac{a_1 + b_0}{2} \qquad (\because \text{相加平均} \geqq \text{相乗平均 と } a_1 \fallingdotseq b_0 \text{ による}) \\
&< a_1. \qquad\qquad (\because b_0 < a_1\text{であった})
\end{aligned}$$

従って，$b_0 < b_1 < a_1$. ① と合わせて，$b_0 < b_1 < a_1 < a_0$. よって $n = 1$ で成立.

$b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1}$ と仮定する．$b_n < \dfrac{b_n + a_n}{2} < a_n \Rightarrow b_n < a_{n+1} < a_n$. 上述の理由と全く同じで，$b_n = \sqrt{b_n}\sqrt{b_n} < \sqrt{b_n}\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_{n+1}b_n} = b_{n+1} < \dfrac{a_{n+1} + b_n}{2} < a_{n+1}$. よって $n + 1$ でも成立．従って，

$b < b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1} < a$ であり，$\{a_n\}$ は単調減少，$\{b_n\}$ は単調増加でそれぞれ有界だから，ともに収束する．次に，

$$a_n - b_n < a_n - b_{n-1} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} < \cdots < \frac{a_0 - b_0}{2^n}.$$

従って，同一の極限値，$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が存在する．$0 < a < b$ のときも同様にして示される．

[1°] $\dfrac{a}{b} = \cos x$ とすれば改めて $\dfrac{a}{b}$ を a，$b = 1$ とすればよいから，$b = 1$ として一般性を失わない．このとき $b_0 = 1, a_0 = \cos x$ として計算すると，

$$a_1 = \frac{1+\cos x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\ ,\ b_1 = \cos\frac{x}{2} \qquad (\because -\pi < x < \pi)$$

などから

$$a_n = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\cos^2\frac{x}{2^n}\ ,\ b_n = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\cos\frac{x}{2^n}$$

と推測される．n のときを仮定すると，

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (\text{定義より})\\
&= \frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\left(\cos\frac{x}{2^n}+1\right)}{2} \qquad (\text{共通因数をくくり出す})\\
&= \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos^2\frac{x}{2^{n+1}}. \quad (\text{半角の公式より})\\
b_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1}\cdot b_n} \qquad (\text{定義より})\\
&= \sqrt{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos^2\frac{x}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}\\
&= \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}. \quad (\because -\pi < x < \pi)
\end{aligned}$$

なので確かに成立する．

$$\begin{aligned}
b_n\cdot\sin\frac{x}{2^n} &= \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}\\
&= \cdots\\
&= \frac{1}{2^n}\sin x.
\end{aligned}$$

従って，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}.$$

[2°] 同様に $b = 1$ とする．このとき $b_0 = 1, a_0 = \cosh x$ として計算すると，$a_1 = \dfrac{\cosh x + 1}{2} = \left(\cosh\dfrac{x}{2}\right)^2$ ，$b_1 = \cosh\dfrac{x}{2}$. などから，

$$\begin{aligned}
a_n &= \cosh\frac{x}{2}\cdot\cosh\frac{x}{2^2}\cdots\cosh\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\cosh^2\frac{x}{2^n}\\
b_n &= \cosh\frac{x}{2}\cdot\cosh\frac{x}{2^2}\cdots\cosh\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\cosh\frac{x}{2^n}.
\end{aligned}$$

となることが数学的帰納法で [1°] と同様に示される．

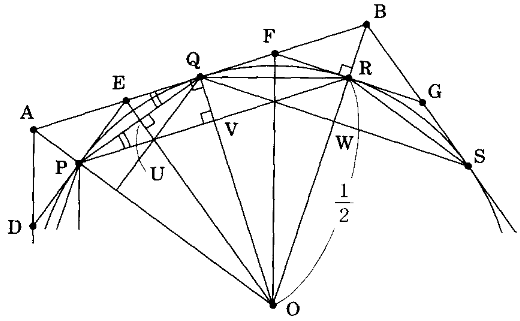
$$\begin{aligned}
b_n\cdot\sinh\frac{x}{2^n} &= \cosh\frac{x}{2}\cdot\cosh\frac{x}{2^2}\cdots\cosh\frac{x}{2^n}\cdot\sinh\frac{x}{2^n}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\cosh\frac{x}{2}\cdot\cosh\frac{x}{2^2}\cdots\cosh\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sinh\frac{x}{2^{n-1}}\\
&= \cdots\\
&= \frac{1}{2^n}\sinh x.
\end{aligned}$$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sinh x}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{2xe^x} =$ (ロピタルより) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1+x} = 1$ だから，

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sinh \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sinh x}{x} \right) = \frac{\sinh x}{x}. \square$$

[注意] [1°] において，直径 1 なる円に内接，外接する辺数 n の正多角形の周の長さを $p(n), P(n)$ と書いて $a = \dfrac{1}{P(k)}, b = \dfrac{1}{p(k)}$ とすれば，$a_n = \dfrac{1}{P(2^n k)}, b_n = \dfrac{1}{p(2^n k)}$ で，極限 $l = \dfrac{1}{\pi}$. 故に $k=4$ または $k=6$ として，π の近似値が求められる．これは円周率の素朴なる計算法の整理である．但し収束は，はなはだ緩慢である．

<確認>以下この事実を $k = 4 = 2^2$ から始めて確認していこう．$p(2^2) = 2\sqrt{2}, P(2^2) = 4$ であることは図を描けばすぐに分かる．



上図において A, B は円 O に外接する正 2^n 角形の頂点，D, E, F, G は同じく 2^{n+1} 角形の頂点とし，P, R は円 O に内接する正 2^n 角形の頂点，P, Q, R, S は同じく 2^{n+1} 角形の頂点とする．まず，

$$AB = \frac{P(2^n)}{2^n}, DE = EF = FG = \frac{P(2^{n+1})}{2^{n+1}} \quad , \quad PR = QS = \frac{p(2^n)}{2^n}, PQ = QR = \frac{p(2^{n+1})}{2^{n+1}}$$

が成り立つ．

$\triangle BFR \backsim \triangle BQW$ なので $QW : FR = QB : FB$ つまり，$QW \cdot FB = FR \cdot QB$. さて，

$$QW = \frac{QS}{2} = \frac{p(2^n)}{2^{n+1}} \ , \ FR = \frac{FG}{2} = \frac{P(2^{n+1})}{2^{n+2}} \ , \ QB = \frac{AB}{2} = \frac{P(2^n)}{2^{n+1}}$$

$$FB = QB - QF = \frac{P(2^n)}{2^{n+1}} - \frac{EF}{2} = \frac{P(2^n)}{2^{n+1}} - \frac{P(2^{n+1})}{2^{n+2}}$$

だから，これらを $QW \cdot FB = FR \cdot QB$ へ代入すると，

$$\frac{p(2^n)}{2^{n+1}} \left(\frac{P(2^n)}{2^{n+1}} - \frac{P(2^{n+1})}{2^{n+2}} \right) = \frac{P(2^{n+1})}{2^{n+2}} \cdot \frac{P(2^n)}{2^{n+1}}$$

が得られる．2^{2n+3} を両辺にかけて整理すると $2p(2^n)P(2^n) - p(2^n)P(2^{n+1}) = P(2^n) \cdot P(2^{n+1})$ となる．全体を $p(2^n)P(2^n)P(2^{n+1})$ で割って，$\dfrac{2}{P(2^{n+1})} = \dfrac{1}{P(2^n)} + \dfrac{1}{p(2^n)}$ を得る．

$$\text{つまり} \quad a_{n-1} = \frac{a_{n-2} + b_{n-2}}{2} \quad \text{を得た.}$$

次に，$\triangle EQU \backsim \triangle QPV$ であるから，これより $EQ : QU = QP : PV$ つまり，$EQ \cdot PV = QP \cdot QU$. これに，

$$EQ = \frac{EF}{2} = \frac{P(2^{n+1})}{2^{n+2}} \ , \ PV = \frac{PR}{2} = \frac{p(2^n)}{2^{n+1}} \ , \ QP = \frac{p(2^{n+1})}{2^{n+1}} \ , \ QU = \frac{PQ}{2} = \frac{p(2^{n+1})}{2^{n+2}}$$

を代入してまとめると $P(2^{n+1})\cdot p(2^n) = \left(p(2^{n+1})\right)^2$ となり，$p(2^{n+1}) = \sqrt{P(2^{n+1})p(2^n)}$ ，すなわち，$\dfrac{1}{p(2^{n+1})} = \sqrt{\dfrac{1}{P(2^{n+1})}\cdot\dfrac{1}{p(2^n)}}$ となるから，

$$b_{n-1} = \sqrt{a_{n-1}\cdot b_{n-2}} \quad \text{を得た．}$$

以上で，漸化式の条件は満足された．$a = \dfrac{1}{P(4)} = \dfrac{1}{4}, b = \dfrac{1}{p(4)} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ だから，$\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}$. となるので，$x = \dfrac{\pi}{4}$ をとると，[1°] より確かに，極限値は，$l = b\cdot\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\pi}$ となる．□

$\boxed{3}$ 有界なる数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ に対して，

$$\overline{\lim}\,(a_n+b_n) \leqq \overline{\lim}\,a_n + \overline{\lim}\,b_n$$
$$\underline{\lim}\,(a_n+b_n) \geqq \underline{\lim}\,a_n + \underline{\lim}\,b_n$$

和の代わりに差，積，商をとればどうか．

上極限，下極限の定義や性質に関して，以下が成立する．*2 **<解答>**以下いくつかの補助定理を示してから $\boxed{3}$ に答える．

[補助定理 1] 2 数 a,b について $\forall\varepsilon>0$ に対して，

$$(i)\ a \geqq b-\varepsilon \Rightarrow a \geqq b \qquad\qquad (ii)\ a \leqq b+\varepsilon \Rightarrow a \leqq b$$

∵(ii) について．$a > b$ と仮定する．$\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$ とおくと $b = a-2\varepsilon$. このとき，$a-(b+\varepsilon) = a-(a-2\varepsilon+\varepsilon) = \varepsilon > 0$ となり仮定に反する．∴ $a \leqq b$. (i) についても同様．■

[補助定理 2]

$$\underline{\lim}\,a_n \leqq \overline{\lim}\,a_n\ .$$

∵定義によれば $l_n := \sup\{a_n, a_{n+1},\dots\}, m_n := \inf\{a_n,a_{n+1},\dots\}$ とおいたとき，$\overline{\lim}\,a_n := \lim\limits_{n\to\infty} l_n$ ，$\underline{\lim}\,a_n := \lim\limits_{n\to\infty} m_n$ であった．$m_n \leqq a_n \leqq l_n$ だから，$\lim\limits_{n\to\infty} m_n \leqq \lim\limits_{n\to\infty} l_n$ すなわち $\underline{\lim}\,a_n \leqq \overline{\lim}\,a_n$ を得る．■

[補助定理 3] $p>0$, $q<0$ のとき，

1) $\underline{\lim}\,(p\cdot a_n) = p\cdot\underline{\lim}\,a_n$
2) $\overline{\lim}\,(p\cdot a_n) = p\cdot\overline{\lim}\,a_n$
3) $\underline{\lim}\,(-a_n) = -\overline{\lim}\,a_n$
4) $\overline{\lim}\,(-a_n) = -\underline{\lim}\,a_n$
5) $\underline{\lim}\,(q\cdot a_n) = q\cdot\overline{\lim}\,a_n$
6) $\overline{\lim}\,(q\cdot a_n) = q\cdot\underline{\lim}\,a_n$

∵　まず 1) を示す．$\underline{\lim}\,a_n = \underline{\lambda}$ とおく．$\forall\varepsilon>0$ に対して，殆ど全ての n について（i.e. 有限個の n を除いて）$a_n > \underline{\lambda}-\varepsilon$. つまりこの $\varepsilon>0$ について $a_n > \underline{\lambda}-\dfrac{\varepsilon}{p}$. また無数の n について（i.e. ある部分列

*2 最近，この 2 つに関して丁寧に解説している本があまりないので，以下にまとめておく．

について）$a_n < \underline{\lambda} + \dfrac{\varepsilon}{p}$. つまり殆ど全ての n について $pa_n > p\underline{\lambda} - \varepsilon$, 無数の n について $pa_n < p\underline{\lambda} + \varepsilon$.
$\therefore\ \underline{\lim}\,(p \cdot a_n) = p\underline{\lambda} = p \cdot \underline{\lim}\,a_n$.
次に 3) を示す．$\underline{\lim}\,(-a_n) = \lambda'$ とおけば，
$\forall \varepsilon > 0$ に対して，殆ど全ての n について，$-a_n > \lambda' - \varepsilon$, i.e. $a_n < -\lambda' + \varepsilon$. また，無数の n について，$-a_n < \lambda' + \varepsilon$, i.e. $a_n > -\lambda' - \varepsilon$. $\therefore\ \overline{\lim}\,a_n = -\lambda' = -\underline{\lim}\,(-a_n)$.
次に 4) を示す．3) より，$-\underline{\lim}\,a_n = -\underline{\lim}\,(-(-a_n)) = \overline{\lim}\,(-a_n)$.
次に 2) を示す．
$\overline{\lim}\,(p \cdot a_n) = \overline{\lim}\,((-p) \cdot (-a_n)) = \overline{\lim}\,(-(p \cdot (-a_n))) = -\underline{\lim}\,(-(p \cdot a_n)) = -\underline{\lim}\,(p \cdot (-a_n)) = -p\,\underline{\lim}(-a_n) = p \cdot \overline{\lim}\,a_n$
次に 5), 6) を示す．$q = -q', q' > 0$ とおく．
$\underline{\lim}\,(q \cdot a_n) = \underline{\lim}\,((-q') \cdot a_n) = \underline{\lim}\,(-(q' \cdot a_n)) = -\overline{\lim}\,(q' \cdot a_n) = -q' \cdot \overline{\lim}\,a_n = q \cdot \overline{\lim}\,a_n$.
$\overline{\lim}\,(q \cdot a_n) = \overline{\lim}\,((-q') \cdot a_n) = \overline{\lim}\,(-(q' \cdot a_n)) = -\underline{\lim}\,(q' \cdot a_n) = -q' \cdot \underline{\lim}\,a_n = q \cdot \underline{\lim}\,a_n$. ■

以下，証明中に $\underline{\lim}\,a_n = \underline{\alpha}$，$\underline{\lim}\,b_n = \underline{\beta}$，$c_n = a_n + b_n$ として，$\underline{\lim}\,c_n = \underline{\gamma}$，$\overline{\lim}\,a_n = \overline{\alpha}$，$\overline{\lim}\,b_n = \overline{\beta}$，$\overline{\lim}\,c_n = \overline{\gamma}$ とする．

＜和＞について

[補助定理 4]

$$\underline{\lim}\,a_n + \underline{\lim}\,b_n \leqq \underline{\lim}\,(a_n + b_n) \leqq \left\{ \begin{array}{c} \underline{\lim}\,a_n + \overline{\lim}\,b_n \\ \overline{\lim}\,a_n + \underline{\lim}\,b_n \end{array} \right\} \leqq \overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leqq \overline{\lim}\,a_n + \overline{\lim}\,b_n$$

$\because$ $\forall \varepsilon > 0$ に対して，殆ど全ての n について $a_n > \underline{\alpha} - \dfrac{\varepsilon}{2}, b_n > \underline{\beta} - \dfrac{\varepsilon}{2}$. 辺々加えて $c_n > \underline{\alpha} + \underline{\beta} - \varepsilon$. つまり，$\underline{\alpha} + \underline{\beta} - \varepsilon := K$ は殆ど全ての（ある N 以上の番号 n について），$\Delta := \{c_n | n \geqq N\}$ の一つの下界 [$\Delta := \{c_n|$ 無数に多くの n $\}$ として良い] であり，一方 $\underline{\gamma}$ は Δ の下限だから，$\underline{\gamma} \geqq K = \underline{\alpha} + \underline{\beta} - \varepsilon$.［補助定理 1］によって，$\underline{\alpha} + \underline{\beta} \leqq \underline{\gamma}$.

$\forall \varepsilon > 0$ に対して，無数に多くの n について $a_n < \underline{\alpha} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. 殆ど全ての n について $b_n < \overline{\beta} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. 辺々加えて，無数に多くの n について $c_n < \underline{\alpha} + \overline{\beta} + \varepsilon$. つまり，$\underline{\alpha} + \overline{\beta} + \varepsilon$ は Δ の上界の一つであり，$\underline{\gamma}$ は Δ の下限だから $\underline{\gamma} \leqq c_n < \underline{\alpha} + \overline{\beta} + \varepsilon$. 同じく［補助定理 1］によって $\underline{\gamma} \leqq \underline{\alpha} + \overline{\beta}$. よって前半部の上段が示された．次に下段である $\underline{\gamma} \leqq \overline{\alpha} + \underline{\beta}$. を示す．$\underline{\gamma} \leqq \underline{\alpha} + \overline{\beta}$ の証明の過程で，$\{a_n\}, \{b_n\}$ の役割を入れ替えれば，$\underline{\gamma} \leqq \underline{\beta} + \overline{\alpha}$.

さて，後半部を示す．数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の代わりに $\{-a_n\}, \{-b_n\}$ を考えれば $\{c_n\}$ の代わりに $\{-c_n\}$ を考えたことになるから，これら $\{-a_n\}, \{-b_n\}, \{-c_n\}$ について今までの議論をあてはめて，

$$\underline{\lim}\,(-a_n) + \underline{\lim}\,(-b_n) \leqq \underline{\lim}\,((-a_n) + (-b_n)) \leqq \left\{ \begin{array}{c} \underline{\lim}\,(-a_n) + \overline{\lim}\,(-b_n) \\ \overline{\lim}\,(-a_n) + \underline{\lim}\,(-b_n) \end{array} \right\}$$

となる．よって［補助定理 3］により

$$-\overline{\lim}\,a_n - \overline{\lim}\,b_n \leqq -\overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leqq \left\{ \begin{array}{c} -\overline{\lim}\,a_n - \underline{\lim}\,b_n \\ -\underline{\lim}\,a_n - \overline{\lim}\,b_n \end{array} \right\}$$

後は各辺にマイナスをかけて，

$$\left\{ \begin{array}{c} \underline{\lim}\,a_n + \overline{\lim}\,b_n \\ \overline{\lim}\,a_n + \underline{\lim}\,b_n \end{array} \right\} \leqq \overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leqq \overline{\lim}\,a_n + \overline{\lim}\,b_n$$

を得る．■

これで $\boxed{3}$ に答えたことになるが，以下＜差＞＜積＞＜商＞についても調べる．

<差>について

$$1)\ \left.\begin{array}{l}\overline{\lim}\,a_n-\overline{\lim}\,b_n\\ \underline{\lim}\,a_n-\underline{\lim}\,b_n\end{array}\right\}\leqq\overline{\lim}\,(a_n-b_n)\leqq\overline{\lim}\,a_n-\underline{\lim}\,b_n$$

$$2)\ \underline{\lim}\,a_n-\overline{\lim}\,b_n\leqq\underline{\lim}\,(a_n-b_n)\leqq\left\{\begin{array}{l}\overline{\lim}\,a_n-\overline{\lim}\,b_n\\ \underline{\lim}\,a_n-\underline{\lim}\,b_n\end{array}\right\}$$

∵1) について．［補助定理 3,4］により，$\overline{\lim}\,a_n-\overline{\lim}\,b_n=\overline{\lim}\,a_n+\underline{\lim}\,(-b_n)\leqq\overline{\lim}\,(a_n+(-b_n))=\overline{\lim}\,(a_n-b_n)$．更に，$\overline{\lim}\,(a_n-b_n)=\overline{\lim}\,(a_n+(-b_n))\leqq\overline{\lim}\,a_n+\overline{\lim}\,(-b_n)=\overline{\lim}\,a_n-\underline{\lim}\,b_n$. 以上で上段が示された．下段については，$\underline{\lim}\,a_n-\underline{\lim}\,b_n=\underline{\lim}\,a_n+\overline{\lim}\,(-b_n)\leqq\overline{\lim}\,(a_n+(-b_n))=\overline{\lim}\,(a_n-b_n)$．

2) について．数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ の代わりに $\{-a_n\},\{-b_n\}$ を代入することで得られる．■

<積>について

[補助定理 5] 2 つの有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ は全ての項が正数とする．このとき，

1) $a_n\cdot b_n=1$ `for all` $n\in\mathbb{N}\Rightarrow\left(\overline{\lim}\,a_n\right)\cdot(\underline{\lim}\,b_n)=1$, $(\underline{\lim}\,a_n)\cdot\left(\overline{\lim}\,b_n\right)=1$

2) $\underline{\lim}\,\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\overline{\lim}\,a_n}$, $\overline{\lim}\,\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\underline{\lim}\,a_n}$ 但し，$\overline{\lim}\,a_n\neq 0,\underline{\lim}\,a_n\neq 0$.

∵1) について．有界だから $\underline{\alpha},\overline{\alpha},\underline{\beta},\overline{\beta}$ は有限確定値．このとき，$\underline{\alpha}\gneqq 0$, $\overline{\beta}\gneqq 0$

> ∵ $\underline{\alpha}<0\Rightarrow-\underline{\alpha}>0$ だから，ε を $-\underline{\alpha}>\varepsilon>0$ にとれば，$\underline{\lim}\,a_n=\underline{\alpha}$ によって，殆ど全ての n について $a_n>\underline{\alpha}-\varepsilon$. 無数に多くの n について，$a_n<\underline{\alpha}+\varepsilon<0$. これは $a_n>0$ という仮定に反する．$\therefore\underline{\alpha}\geqq 0$. $\overline{\beta}\geqq 0$ についても同様である．
>
> また $\underline{\alpha}=0$ ならば，$\forall K>0$ に対して，無数に多くの n について，$a_n<\dfrac{1}{K}$.仮定 $a_n\cdot b_n=1$ から $b_n>K$ となるが，これは $\{b_n\}$ の有界性に反する．$\therefore\underline{\alpha}\neq 0$. 同様に $\overline{\beta}\neq 0$.

$\underline{\alpha}>\varepsilon>0$ なる $\forall\varepsilon>0$ について，$\exists N\in\mathbb{N},n>N$ となる n について $a_n>\underline{\alpha}-\varepsilon$. $\therefore b_n=\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1}{\underline{\alpha}-\varepsilon}$. つまり, $\Delta:=\{b_n|n>N\}$ を考えれば, $\dfrac{1}{\underline{\alpha}-\varepsilon}$ は Δ の 1 つの上界である．Δ の上限を β' とすれば, $\beta'\leqq\dfrac{1}{\underline{\alpha}-\varepsilon}$. 従って $\overline{\beta}\leqq\beta'\leqq\dfrac{1}{\underline{\alpha}-\varepsilon}$ により $\dfrac{1}{\overline{\beta}}\geqq\underline{\alpha}-\varepsilon$.

さて無数に多くの n について，$a_n<\underline{\alpha}+\varepsilon$. $\therefore b_n=\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{1}{\underline{\alpha}+\varepsilon}$. $\Delta':=\{b_n|$ 無数に多くの $n\}$ を考えれば，$\dfrac{1}{\underline{\alpha}+\varepsilon}$ はその 1 つの下界．$\therefore\dfrac{1}{\underline{\alpha}+\varepsilon}\leqq\underline{\beta}\leqq\overline{\beta}$ により，$\underline{\alpha}+\varepsilon\geqq\dfrac{1}{\overline{\beta}}$. 以上より，$\underline{\alpha}-\varepsilon\leqq\dfrac{1}{\overline{\beta}}\leqq\underline{\alpha}+\varepsilon$. 従って，［補助定理 1］により，$\underline{\alpha}=\dfrac{1}{\overline{\beta}}$. $\therefore\underline{\alpha}\cdot\overline{\beta}=1$. 同様にして，$\underline{\beta}\cdot\overline{\alpha}=1$ を得る．

2) について．$\left(\dfrac{1}{a_n}\right)\cdot a_n=1$ だから 1) からの直接の帰結である．■

[補助定理 6] 有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ において，$a_n\geqq 0$, $b_n\geqq 0$ ならば，

$$(\underline{\lim}\,a_n)\cdot(\underline{\lim}\,b_n)\leqq\underline{\lim}\,(a_n\cdot b_n)\leqq\left\{\begin{array}{c}(\underline{\lim}\,a_n)\cdot\left(\overline{\lim}\,b_n\right)\\ \\ \left(\overline{\lim}\,a_n\right)\cdot(\underline{\lim}\,b_n)\end{array}\right\}\leqq\overline{\lim}\,(a_n\cdot b_n)\leqq\left(\overline{\lim}\,a_n\right)\cdot\left(\overline{\lim}\,b_n\right)$$

∵以下，$c_n=a_n\cdot b_n$ として，$\overline{\lim}\,c_n=\overline{\gamma},\underline{\lim}\,c_n=\underline{\gamma}$ とする．

$\underline{\alpha}\geqq 0,\underline{\beta}\geqq 0,\underline{\gamma}\geqq 0$ である．$\min\left\{\underline{\alpha},\underline{\beta}\right\}>\varepsilon>0$ なる ε について $\dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}>0$ である．よって，

殆ど全ての n について $a_n > \underline{\alpha} - \dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1} > 0$，$b_n > \underline{\beta} - \dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1} > 0$. $\because\ \underline{\alpha}-\varepsilon > 0$ より，$\underline{\alpha}\left(\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1\right)-\varepsilon = \underline{\alpha}^2+\underline{\alpha}\underline{\beta}+\underline{\alpha}-\varepsilon > 0$. だから．辺々掛けて，

$$c_n = a_n b_n > \left(\underline{\alpha} - \frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}\right)\left(\underline{\beta} - \frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}\right) = \underline{\alpha}\underline{\beta} - \frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}\left(\left(\underline{\alpha}+\underline{\beta}\right) - \frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}\right)$$

を得る．さて，ここで

$$\begin{aligned}
&\underline{\alpha}\underline{\beta} - \frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}\left(\left(\underline{\alpha}+\underline{\beta}\right) - \frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}\right) - \left(\underline{\alpha}\underline{\beta}-\varepsilon\right) = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}\left(\left(\underline{\alpha}+\underline{\beta}\right) - \frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}\right)\right)\\
&\quad = \varepsilon\cdot\frac{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1-\left(\underline{\alpha}+\underline{\beta}\right)+\dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1} = \varepsilon\cdot\frac{1+\dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1}}{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+1} > 0.
\end{aligned}$$

よって $c_n = a_n b_n > \underline{\alpha}\cdot\underline{\beta}-\varepsilon$. つまり $\underline{\alpha}\cdot\underline{\beta}-\varepsilon$ は殆ど全ての n について，$\Delta'' := \{c_n |$ 殆ど全ての $n\}$ の 1 つの下界である．よって Δ'' の下限 $\gamma' \geqq \underline{\alpha}\cdot\underline{\beta}-\varepsilon$. 故に，$c_n$ の下極限 $\underline{\gamma} \geqq \gamma' \geqq \underline{\alpha}\cdot\underline{\beta}-\varepsilon$. $\therefore \underline{\gamma} \geqq \underline{\alpha}\cdot\underline{\beta}$.

次に $\underline{\gamma} \leqq \underline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ を示す．まず $\underline{\alpha}>0$ かつ $\overline{\beta}>0$ のとき, $\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1>\varepsilon>0$ である ε について, 無数に多くの n について, $a_n < \underline{\alpha}+\dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}$. 殆ど全ての n について, $b_n < \overline{\beta}+\dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}$. つまり無数の n に対して $a_n b_n > 0$ より，$c_n = a_n b_n < \left(\underline{\alpha}+\dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}\right)\cdot\left(\overline{\beta}+\dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}\right) = \underline{\alpha}\overline{\beta}+\dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}\left(\underline{\alpha}+\overline{\beta}+\dfrac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}\right)$.

さて，

$$\begin{aligned}
&\underline{\alpha}\overline{\beta}+\frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}\left(\underline{\alpha}+\overline{\beta}+\frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}\right) - \left(\underline{\alpha}\overline{\beta}+\varepsilon\right)\\
&\quad = \varepsilon\left(\frac{1}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}\left(\frac{\varepsilon}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}+\underline{\alpha}+\overline{\beta}\right)-1\right)\\
&\quad = \varepsilon\frac{\dfrac{\varepsilon-\left(\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1\right)}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1}}{\underline{\alpha}+\overline{\beta}+1} < 0 \quad \left(\because \underline{\alpha}+\overline{\beta}+1>\varepsilon\right) \text{だから，}
\end{aligned}$$

$c_n < \underline{\alpha}\overline{\beta}+\varepsilon$. よって，$\Delta^\circ := \{c_n |$ 無数の $n\}$ に対して，$\underline{\alpha}\overline{\beta}+\varepsilon$ はその 1 つの上界．Δ° の上限を γ' とすれば，$\gamma' \leqq \underline{\alpha}\overline{\beta}+\varepsilon$. $\{c_n\}$ の下極限 $\underline{\gamma} \leqq \gamma' \leqq \underline{\alpha}\overline{\beta}+\varepsilon$. $\therefore \underline{\gamma} \leqq \underline{\alpha}\overline{\beta}$.

次に $\underline{\alpha}=0$ のとき無数の n に対して，$a_n < \underline{\alpha}+\dfrac{\varepsilon}{\overline{\beta}+1}$. しかし $a_n = a_n - 0 = a_n - \underline{\alpha} < \dfrac{\varepsilon}{\overline{\beta}+1}$ が言える．$\overline{\lim}\, b_n = \overline{\beta}$ から，殆ど全ての n について，$b_n < \overline{\beta}+1$ $(\varepsilon=1)$. 結局 $\forall\varepsilon>0$ について，無数の n に対して $0 \leqq a_n \leqq \dfrac{\varepsilon}{\overline{\beta}+1}$，殆ど全ての n について $0 \leqq b_n \leqq \overline{\beta}+1$. 辺々掛けて，無数の n に対して $0 \leqq c_n = a_b b_n < \varepsilon = 0+\varepsilon$. また，殆ど全ての n について $0-\varepsilon < c_n$. 以上より $\underline{\gamma}=0.\overline{\beta}=0$ のときも同様である．よって常に，$\underline{\gamma} \leqq \underline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ が言えた．後は，$\{a_n\},\{b_n\}$ の役目を入れ替えて $\underline{\gamma} \leqq \overline{\alpha}\cdot\underline{\beta}$ が示される．以上で，[補助定理 6] の前半部

$$(\underline{\lim}\, a_n)\cdot(\underline{\lim}\, b_n) \leqq \underline{\lim}\,(a_n\cdot b_n) \leqq \left\{\begin{array}{c}(\underline{\lim}\, a_n)\cdot(\overline{\lim}\, b_n)\\[1ex] (\overline{\lim}\, a_n)\cdot(\underline{\lim}\, b_n)\end{array}\right\}$$

が示された．後半部については $a'_n = \dfrac{1}{a_n}, b'_n = \dfrac{1}{b_n}, c'_n = \dfrac{1}{a_n b_n}$, を前半部に適用して，

$$\left(\underline{\lim}\,\frac{1}{a_n}\right)\cdot\left(\underline{\lim}\,\frac{1}{b_n}\right) \leqq \underline{\lim}\left(\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{b_n}\right) \leqq \left\{\begin{array}{c}\left(\underline{\lim}\,\dfrac{1}{a_n}\right)\cdot\left(\overline{\lim}\,\dfrac{1}{b_n}\right)\\[2ex] \left(\overline{\lim}\,\dfrac{1}{a_n}\right)\cdot\left(\underline{\lim}\,\dfrac{1}{b_n}\right)\end{array}\right\}$$

後は [補助定理 5-2)] を適用して,

$$\frac{1}{\varlimsup a_n}\cdot\frac{1}{\varlimsup b_n} \leqq \frac{1}{\varlimsup a_n b_n} \leqq \left\{\begin{array}{c} \left(\dfrac{1}{\varlimsup a_n}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\varliminf b_n}\right) \\ \\ \left(\dfrac{1}{\varliminf a_n}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\varlimsup b_n}\right) \end{array}\right\}$$

逆数をとって，後半部の

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\varliminf a_n\right)\cdot\left(\varlimsup b_n\right) \\ \\ \left(\varlimsup a_n\right)\cdot\left(\varliminf b_n\right) \end{array}\right\} \leqq \varlimsup\left(a_n\cdot b_n\right) \leqq \left(\varlimsup a_n\right)\cdot\left(\varlimsup b_n\right)$$

を得る．■

[補助定理 3][補助定理 6] を組み合わせる事で次の結果を得る．

有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ において，$a_n \leqq 0$, $b_n \geqq 0$ ならば,

$$\left(\varlimsup a_n\right)\cdot\left(\varliminf b_n\right) \geqq \varlimsup\left(a_n\cdot b_n\right) \geqq \left\{\begin{array}{c} \left(\varliminf a_n\right)\cdot\left(\varliminf b_n\right) \\ \\ \left(\varlimsup a_n\right)\cdot\left(\varlimsup b_n\right) \end{array}\right\} \geqq \varliminf\left(a_n\cdot b_n\right) \geqq \left(\varliminf a_n\right)\cdot\left(\varlimsup b_n\right)$$

有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ において，$a_n \geqq 0$, $b_n \leqq 0$ ならば,

$$\left(\varliminf a_n\right)\cdot\left(\varlimsup b_n\right) \geqq \varlimsup\left(a_n\cdot b_n\right) \geqq \left\{\begin{array}{c} \left(\varliminf a_n\right)\cdot\left(\varliminf b_n\right) \\ \\ \left(\varlimsup a_n\right)\cdot\left(\varlimsup b_n\right) \end{array}\right\} \geqq \varliminf\left(a_n\cdot b_n\right) \geqq \left(\varlimsup a_n\right)\cdot\left(\varliminf b_n\right)$$

有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ において，$a_n \leqq 0$, $b_n \leqq 0$ ならば,

$$\left(\varlimsup a_n\right)\cdot\left(\varlimsup b_n\right) \leqq \varliminf\left(a_n\cdot b_n\right) \leqq \left\{\begin{array}{c} \left(\varliminf a_n\right)\cdot\left(\varlimsup b_n\right) \\ \\ \left(\varlimsup a_n\right)\cdot\left(\varliminf b_n\right) \end{array}\right\} \leqq \varlimsup\left(a_n\cdot b_n\right) \leqq \left(\varliminf a_n\right)\cdot\left(\varliminf b_n\right)$$

<商>について

$a_n > 0, b_n > 0, \varlimsup a_n > 0$ という条件の下では，$\dfrac{b_n}{a_n} = b_n\dfrac{1}{a_n}$ だから，[補助定理 5][補助定理 6] を組み合わせる事で次の結果を得る．

有界数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ において，$a_n > 0$, $b_n > 0$, $\varlimsup a_n > 0$ ならば,

$$\frac{\varliminf b_n}{\varlimsup a_n} \leqq \varliminf\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \leqq \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\varliminf b_n}{\varliminf a_n} \\ \\ \dfrac{\varlimsup b_n}{\varlimsup a_n} \end{array}\right\} \leqq \varlimsup\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \leqq \frac{\varlimsup b_n}{\varliminf a_n}$$

以上で $\boxed{3}$ を全て示した．□

$\boxed{4}$ 以下のように $x>0$ において定義された函数 $f(x)$ の連続性を論じよ．

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (x\text{ が無理数}) \\ \dfrac{1}{q} & \left(x=\dfrac{p}{q}\right) \left(\text{但し，}\dfrac{p}{q}\text{は既約分数で } q>0\right) \end{cases}$$

＜解答＞結論としては，x が有理数のとき不連続で，x が無理数のとき連続である．以下，それを示すが，自然数 N に対しては，$N=\dfrac{N}{1}$ と解釈して $f(N)=f\left(\dfrac{N}{1}\right)=\dfrac{1}{1}=1$ となる．

$x_0=\dfrac{p}{q}$ において，$f(x)$ は不連続であることを示す．$\varepsilon=\dfrac{1}{q^2}$ とすると，$\forall\,\delta>0$ に対して，$|\,x-x_0\,|<\delta$ を満たす無理数 x は無数に存在する．この無理数 x に対して，$|\,f(x)-f(x_0)\,|=\left|0-\dfrac{1}{q}\right|=\dfrac{1}{q}>\dfrac{1}{q^2}=\varepsilon.$ 従って，不連続である．

次に，$x_0=\xi$ が無理数のとき $x=x_0$ で $f(x)$ は連続であることを示す．今，$1>\forall\,\varepsilon>0$ なる ε をとって固定するとき，$\exists\delta>0, |\,x-\xi\,|<\delta \Rightarrow |\,f(x)-f(\xi)\,|<\varepsilon.$ を示せば良い．

$1>\forall\,\varepsilon>0$ である ε を固定する限り，この ε に関して，開区間 $I_0=(0,1)$ の中に存在する既約分数のうち $\dfrac{1}{q}\geqq\varepsilon\ \left(\iff 1>\dfrac{1}{q}\geqq\varepsilon\right)$ を満たす整数 q は有限個しかない．

> ∵ $\dfrac{1}{q}\geqq\varepsilon>0$ より，$\dfrac{1}{\varepsilon}\geqq q>0$. q はここで自然数であり，いくら ε が小さくとも固定する限り $\dfrac{1}{\varepsilon}$ は確定値であるから，$\dfrac{1}{\varepsilon}$ と 0 の間にある自然数は有限個である．

すると，I_0 の中の既約分数 $\dfrac{p}{q}$ は，$p<q$ なので，p は自然数であるから，やはり有限個しかない．結局，$1>\forall\,\varepsilon>0$ である ε を固定する限り，$I_0=(0,1)$ の中の既約分数で $\dfrac{1}{q}\geqq\varepsilon$ である既約分数 $\dfrac{p}{q}$ は有限個しかない．

次に，$1>\forall\,\varepsilon>0$ である ε を固定して，任意の無理数 ξ に関して，半開区間 $I_\xi=[\xi-\frac{1}{2},\xi+\frac{1}{2})$ を考える．I_ξ の幅は 1 だが，I_ξ 内の既約分数のうち，この ε について，$\dfrac{1}{q}\geqq\varepsilon$ となる $\dfrac{p}{q}$ はやはり有限個しかない．

> ∵上で述べたように，$\dfrac{1}{q}\geqq\varepsilon$ である q は有限個．I_ξ 内で既約分数である $\dfrac{p}{q}$ は，p を q で割って得る商を a，余りを p_0 と書くとき，$0<p_0<q$ で，$\dfrac{p}{q}=a+\dfrac{p_0}{q}$ とかけて，$\dfrac{p_0}{q}\in I_0$ で，しかも既約分数だから，$\dfrac{p_0}{q}$ は有限個．a は確定値だから $a+\dfrac{p_0}{q}=\dfrac{p}{q}$ も有限個しかない．

結局，任意の無理数 ξ について，I_ξ 毎に，$0<\xi<\frac{1}{2}$ なら区間 I_0 の中の既約分数 $\dfrac{p}{q}$ を考え，$\xi>\frac{1}{2}$ ならば，区間 I_ξ の中の既約分数 $\dfrac{p}{q}$ を考えて，与えられた $1>\varepsilon>0$ について，$\dfrac{1}{q}\geqq\varepsilon$ である q を分母とする既約分数は有限個しかないから，これら有限個の既約分数 $\dfrac{p}{q}$ と ξ との距離 $\left|\xi-\dfrac{p}{q}\right|$ の集合 $M_\xi=\left\{\left|\xi-\dfrac{p}{q}\right|\right\}$ は有限集合である．よって，M_ξ には最小値 δ_0 が存在する．i.e.$\left|\xi-\dfrac{p}{q}\right|\geqq\delta_0$. この δ_0 について，$\left|\xi-\dfrac{p}{q}\right|<\delta_0$ である $\dfrac{p}{q}$ は自然数でない．仮に自然数 N が $|\,\xi-N\,|<\delta_0$ を満たすとすれば，$N=\dfrac{N}{1}$ で，$\dfrac{1}{1}\geqq\varepsilon$ だから，N は既約分数で，$\dfrac{1}{q}\geqq\varepsilon$ を満たす $\dfrac{p}{q}$ の一員であるから，$|\,\xi-N\,|\geqq\delta_0$ を満たす．しかし，これは矛盾．

さて，$1>\forall\,\varepsilon>0$ である ε を固定して，この δ_0 に関して，$|\,x-\xi\,|<\delta_0 \Rightarrow |\,f(x)-f(\xi)\,|<\varepsilon.$ となることを示す．まず，x が無理数であれば，$|\,f(x)-f(\xi)\,|=|\,0-0\,|=0<\varepsilon.$ である．x が有理

数のとき，上の注意によって，x は分母 $\fallingdotseq 1$ の既約分数であったから，今 $x = \dfrac{p}{q}$，$q \fallingdotseq 1$ とおけて，
$|\,f(x) - f(\xi)\,| = \left|\,f(\tfrac{p}{q}) - f(\xi)\,\right| = \left|\dfrac{1}{q} - 0\right| = \dfrac{1}{q} < \varepsilon.$

> $\because$最後の不等式が，$\dfrac{1}{q} \geqq \varepsilon$ であったとすると，$\left|\xi - \dfrac{p}{q}\right| \geqq \delta_0$. だが，これは仮定 $|x - \xi| < \delta_0$，$x = \dfrac{p}{q}$ と矛盾する．

$\square$

> **5** $f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続とする．もし $[a, b]$ 内に稠密に分布されている点 x において（例えば，x が有理数のとき），$f(x)$ と $g(x)$ が相等しい値を取るならば，$[a, b]$ の全ての点 x において $f(x) = g(x)$.

＜解答＞
まず，$f(x)$ が連続だから，

$$f(a) > 0 \Rightarrow (\exists\delta > 0\,(\forall x) : |\,x - a\,| < \delta \Rightarrow f(x) > 0)$$

が成立することに注意する．

> $\because \varepsilon = \dfrac{f(a)}{2} > 0$ をとると，$f(x)$ の連続性により，
> $\exists\delta > 0\,(\forall x) : |\,x - a\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon = \dfrac{f(a)}{2}$ i.e. $0 < \dfrac{f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{3f(a)}{2}$.

同様に，

$$f(a) < 0 \Rightarrow (\exists\delta > 0\,(\forall x) : |\,x - a\,| < \delta \Rightarrow f(x) < 0)$$

も成立する．

$f(p) = g(p)\ \ (\forall p \in \mathbb{Q}) \Rightarrow f(x) = g(x)\ \ (\forall x \in \mathbb{R})$ を示せばよい．$F(x) = f(x) - g(x)$ とすると，$f(x), g(x)$ の連続性から $F(x)$ も連続であり，$F(p) = 0\ \ (\forall p \in \mathbb{Q})$．

さて，$f(a) \fallingdotseq g(a)$ となる $a \in \mathbb{R}$ が存在したとすると，$F(a) > 0$ または $F(a) < 0$ のいずれかが成立する．$F(a) > 0$ の場合を考える．上の注意から $\exists\delta > 0 : a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow F(x) > 0$ 一方，有理数の稠密性から $a - \delta < \exists p < a + \delta$ である有理数 p が存在し，$F(p) > 0$ i.e. $F(p) \fallingdotseq 0$. これは仮定に反する．$F(a) < 0$ の場合も同様にして証明される．$\square$

> **6** $f(x)$ が $E := [a, b]$ 内の有理数 x の集合 D でのみ定義されているとき，$f(x)$ が D で連続ならば，$f(x)$ の定義を拡張して区間 $[a, b]$ 全体で連続であるようにできるか.

＜解答＞次の (1)(2) が同値であることを示す.

(1) $f(x)$ が D で一様連続
(2) E で連続な函数 $F(x)$ が定義できて，$F(x) = f(x)\ \forall x \in D$
また，このような $F(x)$ は唯一つに限る．

<u>(1) $\Rightarrow$ (2) の証明</u> 定義により，

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, \forall y \in D : |\,x - y\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - f(y)\,| < \varepsilon.$$

D は $[a,b]$ で稠密だから，$\forall c \in [a,b]$ に対して，D 内の要素からなる数列 $\{c_n\}$ で，$\lim_{n\to\infty} c_n = c$ となるものが存在する．よって，$\{c_n\}$ は収束数列だから Cauchy 列であり，$\exists n_0 \in \mathbb{N} : m, n > n_0 \Rightarrow |c_m - c_n| < \delta.$ が成立するから定義により，$|f(c_m) - f(c_n)| < \varepsilon.$ よって，$\{f(c_n)\}$ も Cauchy 列だから実数上で収束する．つまり，$\exists A \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(c_n) = A.$ そこで，$F(c) := A.$ と定義する．

(`Step 1`) $F(x)$ が well-defined であることを示す．c に収束する D 内の別な数列 $\{d_n\}$ があるとする $\left(\lim_{n\to\infty} d_n = c\right)$．$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |c_n - c| < \dfrac{\delta}{2}, |d_n - c| < \dfrac{\delta}{2}.$ よって三角不等式により，$|c_n - d_n| < \delta.$ よって定義により，$|f(c_n) - f(d_n)| < \varepsilon.$ ところで，既に述べたように，$|f(c_n) - A| < \varepsilon.$ だったから，$|f(d_n) - A| \leqq |f(d_n) - f(c_n)| + |f(c_n) - A| < 2\varepsilon \ \therefore \lim_{n\to\infty} f(d_n) = A.$

以上により，c に収束する有理数列の選び方に関係なく，$F(c)$ が只一つ定まる．

(`Step 2`) $F(x)$ が $[a,b]$ 上，連続であることを示す．最初に述べたように，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, \forall y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$ $\forall c \in [a,b], \exists \{x_n\} \subseteq [a,b]$ `s.t.` $\lim_{n\to\infty} x_n = c.$ $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(c)$ となることを示せば良い． $\therefore \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |x_n - c| < \dfrac{\delta}{2}.$

ここで各 n を固定すれば，$\exists \{p_{n,m}\}, \exists \{q_{n,m}\} \subseteq \mathbb{N}\ (m = 1, 2, 3, \ldots)$ `s.t.` $\dfrac{p_{n,m}}{q_{n,m}} \leqq x_n < \dfrac{p_{n,m}+1}{q_{n,m}}$ とすることができる．

> $\because x_n$ は実数だから数直線上を幅 $\dfrac{1}{10^m}$ の区間
>
> $$\ldots, \frac{-2}{10^m}, \frac{-1}{10^m}, 0, \frac{1}{10^m}, \frac{2}{10^m}, \ldots, \frac{a_k}{10^m}, \frac{a_k+1}{10^m}, \ldots$$
>
> で区切っていけば，いつかは，$\dfrac{a_k}{10^m} \leqq x_n < \dfrac{a_k+1}{10^m}$ となる，m, a_k が存在する．しかも，$0 \leqq x_n - \dfrac{a_k}{10^m} < \dfrac{1}{10^m}$ だから，$m \to \infty$ のとき，$\dfrac{a_k}{10^m} \to x_n$ でもある．

最後の注意により，$\exists m(n,\delta) \in \mathbb{N} : m > m(n,\delta) \Rightarrow 0 < x_n - \dfrac{p_{n,m}}{q_{n,m}} < \dfrac{\delta}{2}$ とすることが出来る．

n に対して m を一つずつ定め $m(1) < m(2) < \cdots < m(n-1) < m(n) < \cdots$ となるように選べば，$0 < x_n - \dfrac{p_{n,m(n)}}{q_{n,m(n)}} < \dfrac{\delta}{2}$ よって (`Step 1`) によれば，$\left| f\left(\dfrac{p_{n,m(n)}}{q_{n,m(n)}}\right) - F(x_n) \right| \leqq \varepsilon.$

一方，$n > n_0$ の時，$\left| \dfrac{p_{n,m(n)}}{q_{n,m(n)}} - c \right| \leqq \left| \dfrac{p_{n,m(n)}}{q_{n,m(n)}} - x_n \right| + |x_n - c| < \dfrac{\delta}{2} + \dfrac{\delta}{2} = \delta.$ よって (`Step 1`) によれば，$\left| f\left(\dfrac{p_{n,m(n)}}{q_{n,m(n)}}\right) - F(c) \right| \leqq \varepsilon.$

以上により，$|F(x_n) - F(c)| \leqq \left| F(x_n) - f\left(\dfrac{p_{n,m(n)}}{q_{n,m(n)}}\right) \right| + \left| f\left(\dfrac{p_{n,m(n)}}{q_{n,m(n)}}\right) - F(c) \right| \leqq 2\varepsilon.$ よって，$F(x)$ は $x = c$ で連続である．

このような $F(x)$ の一意性の証明．仮定を満たす 2 つの函数 $F_1(x), F_2(x)$ があったとして，$\psi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ とおく．$F_1(x), F_2(x)$ は E 上で連続だから，$\psi(x)$ も E 上で連続．しかも，$x \in D$ 上では，$\psi(x) = 0. \forall a' \in E - D$ について $\exists \{a_n\} \subseteq D$ `s.t.` $\lim_{n\to\infty} a_n = a'.$ このとき，$\psi(a') = \lim_{n\to\infty} \psi(a_n) = 0.$ いずれにしても，$\forall x \in [a,b] : \psi(x) = 0.$ $\therefore F_1(x) = F_2(x).$

<u>$(2) \Rightarrow (1)$ の証明</u>

$F(x)$ は閉区間 $E = [a,b]$ で連続だから，一様連続．$D \subseteq E$ より $F(x)$ は勿論 D 上で一様連続．つまり，$F(x) = f(x)$ `for all` $x \in D.$ より $f(x)$ は D 上で一様連続．□

$\boxed{7}$ $f(x)$ が，(a, ∞) で連続のとき，$\lim_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = l \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l.$

＜解答＞ まず，$l=0$ の場合を示す．仮定により，$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\exists M>0$ s.t. $\forall x>M \Rightarrow |f(x+1)-f(x)|<\varepsilon$. 今 $x>M$ を考えているが，$n=\lfloor x\rfloor-M$ とおくと，$\lfloor x\rfloor \leqq x<\lfloor x\rfloor+1$ により，$M\leqq x-n<M+1$ とすることが出来る．このときは $M\leqq x-n<x-n+1<x-n+2<\cdots<x-1<x$ だから，$f(x)=f(x)-f(x-1)+f(x-1)-f(x-2)+f(x-2)-\cdots-f(x-n+1)+f(x-n+1)-f(x-n)+f(x-n)$ によって，

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqq |f(x)-f(x-1)|+\cdots+|f(x-n+1)-f(x-n)|+|f(x-n)|\\ &\leqq n\varepsilon+|f(x-n)|<x\varepsilon+|f(x-n)|. \quad (x\to\infty \text{ だから，勿論 } x>n)\end{aligned}$$

$\therefore |f(x)|<x\varepsilon+|f(x-n)|$. ここで閉区間 $[M,M+1]$ における $|f(x)|$ の最大値を M_0 とおけば，
$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon+\dfrac{M_0}{x}<2\varepsilon.\left(x>\dfrac{M_0}{\varepsilon}\text{ とすればよい}\right)$．よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. が示された.
$l\fallingdotseq 0$ のときは，$F(x)=f(x)-l\cdot x$ とすると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(F(x+1)-F(x))=0$ より，
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-l\right)=0$. よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=l$. □[*3]

8 $f(x)$ は区間 K で連続，$g(y)$ は区間 G において連続とし，$x\in K\Rightarrow f(x)\in G$. とする．このとき $g(f(x))$ は K において連続である．

＜解答＞ $\displaystyle\lim_{x\to a}g(f(x))=g(f(a))$ を示せば良い．ここで，“$x\to a$ in K” である．
$y=f(x)$ とおくと，$g(y)$ は G で連続だから，特に $f(a)$ でも連続である．
よって，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'>0$ s.t. $0<|y-f(a)|<\delta'\Rightarrow|g(y)-g(f(a))|<\varepsilon$. つまり，$|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$. となっている．
さて，この $\delta'>0$ に対して，$f(x)$ は $x=a$ で連続だから，$\exists\delta>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\delta'$.
以上をまとめると，
$\forall\varepsilon>0$ に対して ($\exists\delta'>0$ この δ' に対して更に) $\exists\delta>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\delta'\Rightarrow|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$. 以上から，$g(f(x))$ は $x=a$ で連続であり，a は K での任意の点だから，$g(f(x))$ は K において連続である．□

9 $a>0$ のとき，$(a^x)^y=a^{xy}$ は全ての実数値 x,y に関して成立する．但し，x,y が有理数なるとき，それは既知とする．

＜解答＞[*4] まず，“実数 x，特に無理数 x に対しての a^x の定義” から始めよう．
補題 A : 1 つの有理数列 $\{x_n\}$ が収束するならば $\{a^{x_n}\}$ もまた，収束する．

> $\because$ $a=1$ の場合 は $a^{x_n}=1^{x_n}=1$ による．
> $a>1$ の場合 :$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\{x_n\}$ は収束するので有界，今その上界の一つの有理数を G として，整数 q を $a^G\cdot\dfrac{a-1}{\varepsilon}<q$ と定めると，$\dfrac{1}{q}$ に対して有理数列 $\{x_n\}$ が収束するから，適当な n_0 を定めて，$m\geqq n_0, n\geqq n_0$ なる全ての m,n に対して，$-\dfrac{1}{q}<x_m-x_n<\dfrac{1}{q}$ とすることができる (Cauchy 列)．a^x は単調に増加するから，$a^{-\frac{1}{q}}<a^{x_m-x_n}<a^{\frac{1}{q}}$ である．$a=1+d$ $(d>0)$ とおけば，二項定理

[*3] ※　高校では，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を示すのに，不等式 $\log x<\sqrt{x}$ を用いるのだが，本問はその別解である．　[*4] 本文では，“$f(x,y)=x^y$ の連続性は，xy 平面上の有界なる区域で，$f(x,y)$ が有理数 x,y に関して一様連続であることから，「問題 6」を適用することで得られる．” としてあるが，ここでは問題 6 の適用は考えずに，直接の証明をする．
以下は「極限論と集合論」（能代　清（著）岩波書店）からの該当箇所を補足，清書したものであり，最初に “実数 x に対しての a^x の定義”$(a>0)$ から説明が始まる．

により,

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} = \sqrt[q]{1+d} < 1 + \frac{d}{q} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$a^{-\frac{1}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a}} > \frac{1}{1+\dfrac{d}{q}} > 1 - \frac{d}{q}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

$$\because \frac{1}{1+\dfrac{d}{q}} - \left(1 - \frac{d}{q}\right) = \frac{d^2}{q(q+d)} > 0.$$

よって,

$$1 - \frac{d}{q} < a^{-\frac{1}{q}} < a^{x_m - x_n} < a^{\frac{1}{q}} < 1 + \frac{d}{q}. \qquad \therefore\ |a^{x_m - x_n} - 1| < \frac{a-1}{q} \cdots \text{③}.$$

さて $x_n \leqq G$ であったから，$a^{x_n} \leqq a^G$.

$$\therefore\ |a^{x_m} - a^{x_n}| = a^{x_n} \cdot |a^{x_m - x_n} - 1| < a^G \cdot \frac{a-1}{q} < \varepsilon.$$

よって $\{a^{x_n}\}$ は Cauchy 列だから確かに収束する．

$\underline{0 < a < 1 \text{ の場合：}}$$b := \dfrac{1}{a} > 1$ で $\{-x_n\}$ は収束するから，今，述べたことより，$\{b^{-x_n}\}$ は収束する．しかるに，$b^{-x_n} = \dfrac{1}{b^{x_n}} = \left(\dfrac{1}{b}\right)^{x_n} = a^{x_n}$. だから，確かに $\{a^{x_n}\}$ は収束する．

補題 B : 2 つの有理数列 $\{x_n\}$ ，$\{y_n\}$ がともに収束して，かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ とすれば,
$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{y_n}$.

$\because$仮定の下で，$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ は収束数列である．よって**補題** A によれば,
$a^{x_1}, a^{y_1}, a^{x_2}, a^{y_2}, \ldots, a^{x_n}, a^{x_n}, \ldots$ も収束する．この収束数列の部分列として, 特に $a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots, a^{x_n}, \ldots$ 及び，$a^{y_1}, a^{y_2}, \ldots, a^{y_n}, \ldots$ は元の数列と同じ極限値に収束する．

特に，$x_1, x_2, \ldots$ が有理数の極限値 x を持つとき，2 つの数列 $x_1, x_2, \ldots$ 及び $x, x, \ldots$ は共通の極限値 x を持ち，**補題** B によれば，$a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots$ および $a^x, a^x, \ldots$ は共通の極限値 a^x を持ち，$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

さて，無理数 x に収束する有理数列 $\{x_n\}$ は一意には定まらないが，おのおのについて $\{a^{x_n}\}$ は**補題** B によって同一の極限値を持ち，それを a^x で表すことにする．こうして正の数を底とする冪は有理数は勿論，無理数を指数とする場合にも定義された．　i.e. well-defined.

定義：x を有理数又は無理数とするとき，$x_n \to x$ となる有理数列 $\{x_n\}$ が存在し，この $\{x_n\}$ の選び方に関係なく，$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$. と定義する．但し $a > 0$ である．

・x が無理数のときも $a^x > 0$ である．

$\because x$ に収束する有理数列 $\{x_n\}$ は有界だから，$g < x_n < G$. ここに，g, G は有理数とする．$a > 1$ の場合は，$a^{x_n} > a^g > 0$, $\therefore a^x \geqq a^g > 0$. $0 < a < 1$ の場合には $\dfrac{1}{a} > 1$. 故に $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x_n} > \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-G}$.
$\therefore a^{x_n} \geqq a^G > 0$. $\therefore a^x \geqq a^G > 0$. $a = 1$ の場合は，$a^{x_n} = 1^{x_n} = 1 > 0$. $\therefore a^x = 1 > 0$.

補題 C : 数列 $\{x_n\}$ が収束して，かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であるときは，$\{a^{x_n}\}$ も収束して，かつ $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

$\because \{x_n\}$ が有理数列の場合は**補題** A で既に述べた.

$a = 1$ の場合 は $a^{x_n} = 1^{x_n} = 1$, $1^x = 1$ による.

$a > 1$ の場合 $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\dfrac{a-1}{\varepsilon} < q$ となる整数 q をとると, 十分大きな全ての n に対して, $-\dfrac{1}{q} < x_n - x < \dfrac{1}{q}$. となる. a^x は単調増加だから, $a^{-\frac{1}{q}} < a^{x_m - x} < a^{\frac{1}{q}}$ である. $a = 1 + d\ (d > 0)$ とおけば ①,②,③ と同様にして, $|a^{x_n - x} - 1| < \dfrac{a-1}{q} < \varepsilon$. 従って, $\lim_{n\to\infty} a^{x_n - x} = 1$.

よって,

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a^x \cdot a^{x_n - x}\right) = a^x \cdot \left(\lim_{n\to\infty} a^{x_n - x}\right) = a^x \cdot 1 = a^x.$$

$0 < a < 1$ の場合 $b := \dfrac{1}{a} > 1$ だから今証明したことにより, $\lim_{n\to\infty} b^{x_n} = b^x$. 書き換えて,

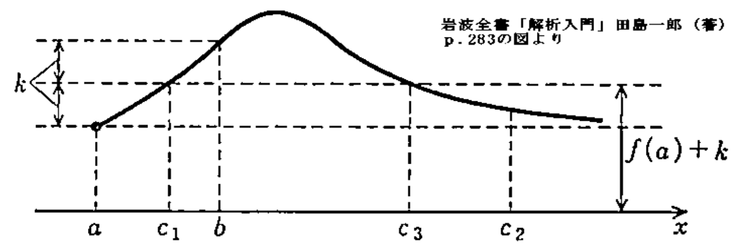
$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{x_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b^{x_n}} = \frac{1}{b^x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x = a^x.$$

いよいよ $(a^x)^y = a^{xy}$ の証明に入る. y が有理数の場合は既知である.

y が無理数のとき, y に収束する有理数列 $\{y_n\}$ をとる. このとき, $(a^x)^{y_n} = a^{xy_n}$ であるから, $\lim_{n\to\infty} (a^x)^{y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{xy_n}$. 左辺 $= \lim_{n\to\infty} (a^x)^{y_n} = (a^x)^y$. $\lim_{n\to\infty} (xy_n) = xy$. だから**補題** C によって, 右辺 $= \lim_{n\to\infty} a^{xy_n} = a^{xy}$. となる. よって, $(a^x)^y = a^{xy}$ が示された. □

第 2 章・章末問題と解答

$\boxed{1}$ $[a,\infty)$ において $f(x)$ が微分可能で $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ ならば，$\xi > a, f'(\xi) = 0$ なる ξ が存在する．(Rolle の定理の拡張)



Proof. $f(x)$ が $[a,\infty)$ において定数函数ならば，$f'(x) = 0$ により正しい．

定数函数でなければ，$f(a) \fallingdotseq f(b)$ $(a < b)$ となる b が存在する．いま，$f(a) < f(b)$ として，$f(b) - f(a) = 2k$ とおくと，中間値の定理により，$f(c_1) = f(a) + k$ $(a < c_1 < b)$ となる c_1 が存在する．

一方，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ だから，$|\,f(c_2) - f(a)\,| < k \ \Rightarrow f(c_2) - f(a) \leqq |\,f(c_2) - f(a)\,| < k$.

$\therefore\ f(c_2) < f(a) + k < f(b)$ となる十分大なる $(b <)c_2$ が存在し，再び中間値の定理から，$f(c_3) = f(a) + k$ $(b < c_3 < c_2)$ となる c_3 が存在する．すると，$f(c_1) = f(c_3)$ だから Rolle の定理により $f'(\xi) = 0$, $a < c_1 < \xi < c_3$ となる $a < \xi$ の存在がわかる． $\square$

<別解> $\dfrac{1}{x-a+1} = t$ とおけば $x = \dfrac{1}{t} + a - 1$ で，今これを $x = \varphi(t)$ とすると，

x	a	↗	$+\infty$
t	1	↘	0

だから，$a \leqq x < +\infty$ には $1 \geqq t > 0$ が対応する．

$\varphi(1) = a, \displaystyle\lim_{t\to+0}\varphi(t) = +\infty, f(\varphi(t)) := g(t)$ は $0 < t < 1$ で微分可能である．

$$\lim_{t\to+0} g(t) = \lim_{t\to+0} f(\varphi(t)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a) = f(\varphi(1)) = g(1)\ .$$

元々 $g(t)$ は $t = 0$ で未定義であったが，改めて $g(0) = g(1)$ と定義し直せば，$g(t)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続となり，Rolle の定理から $0 < \exists\,\eta < 1$ $\texttt{s.t.}g'(\eta) = 0$. そこで $\xi := \varphi(\eta)$ とすると，$g'(t) = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ より，$0 = g'(\eta) = f'(\varphi(\eta))\,\varphi'(\eta) = f'(\xi)\,\varphi'(\eta)$.

$\varphi'(\eta) = -\dfrac{1}{\eta^2} \fallingdotseq 0$ であるから，$f'(\xi) = 0$ で，かつ $\xi > a$. <了>

$\boxed{2}$ $a > 0, \dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^a} := \dfrac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{a+n}}$ とすれば，$P_n(x)$ は n 次の多項式で，それは n 個の相異なる実根を有し，それらの根は $P_{n+1}(x) = 0$ の $n+1$ 個の実根で隔離される．

具体的に $n = 1,2,3,4,5$ 程度まで $P_n(x)$ を求める[*5]と，

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= -2ax \\
P_2(x) &= 2a\left((2a+1)\,x^2 - 1\right) \\
P_3(x) &= -4a(a+1)x\left((2a+1)\,x^2 - 3\right) \\
P_4(x) &= 4a(a+1)\left((2a+1)(2a+3)x^4 - 6(2a+3)x^2 + 3\right) \\
P_5(x) &= -8a(a+1)(a+2)x\left((2a+1)(2a+3)x^4 - 10(2a+3)x^2 + 15\right)
\end{aligned}$$

[*5] 数式処理電卓 “TI-Voyage200” による．

Proof. $1+x^2$ は x が実数である限り $\neq 0$ だから，$f^{(n)}(x) := \dfrac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{a+n}}$ と定義したとき，$f^{(n)}(x)=0$ と $P_n(x)=0$ の実根は等しいことに注意する．

(1) $P_n(x)$ は n 次の多項式である．$n=1$ のときは，$P_1(x)=-2ax$ だったから，主張は確かに正しい．$P_n(x)$ は n 次の多項式であると仮定する．

$$\begin{aligned}
\frac{P_{n+1}(x)}{\left(1+x^2\right)^{a+n+1}} &= f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{a+n}} \\
&= \frac{d}{dx}P_n(x)\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{a+n}} - P_n(x)\cdot\frac{2(a+n)x}{\left(1+x^2\right)^{a+n+1}} \\
\therefore P_{n+1}(x) &= \frac{d}{dx}P_n(x)\cdot\left(1+x^2\right) - P_n(x)\cdot 2(a+n)x\ .
\end{aligned}$$

$P_n(x)$ の n 次の係数を c とすると上の式の右辺の $n+1$ 次の係数は $cn - c\cdot 2\cdot(a+n) = -c\cdot(n+2a)\neq 0$．よって，確かに $P_{n+1}(x)$ は x についての $n+1$ 次の多項式である．

(2)$P_n(x)=0$ は n 個の相異なる実根を有し，それらの根は $P_{n+1}(x)=0$ の $n+1$ 個の実根で隔離される．

$P_1(x)=-2ax$ の根は $x=0$ の只 1 個である．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f^{(1)}(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{-2ax}{\left(1+x^2\right)^{a+1}} = 0 = f^{(1)}(0)$ であり，$f^{(1)}(x)$ は $[0,\infty)$ で微分可能である．よって，$\boxed{1}$ により，$\exists\,\xi\in[0,\infty)$ s.t. $f^{(2)}(\xi)=0$. 即ち $P_2(\xi)=0$.

同様に，x を $-x$ で置き換えて議論すれば，$\exists\,\tau\in[0,\infty)$ s.t. $P_2(\tau)=0$.

従って，$P_2(x)=0$ は相違なる 2 実根を持ち，$P_1(x)=0$ の根を隔離する．*6

次に $P_n(x)=0$ が相違なる n 個の実根 $\xi_1^n<\xi_2^n<\cdots<\xi_n^n$ を持つと仮定する．$P_n(x)=0 \iff f^{(n)}(x)=0$ だから，$f^{(n)}(\xi_i^n)=f^{(n)}(\xi_{i+1}^n)=0\ (i=1,2,\ldots,n-1)$ であり，$f^{(n)}(x)$ は微分可能だから，Rolle の定理により，$\xi_i^n<\exists\,\xi_{i+1}^{n+1}<\xi_{i+1}^n$ s.t. $f^{(n+1)}\left(\xi_{i+1}^{n+1}\right)=0$. つまり，$P_{n+1}\left(\xi_{i+1}^{n+1}\right)=0\ (i=1,2,\ldots,n-1)$ である．後，残り 2 個の根を見つける．

次に $P_n(\xi_n^n)=0$ だから，$f^{(n)}(\xi_n^n)=0$ かつ，$P_n(x)$ が x についての n 次多項式だから，L'Hopital の定理を繰り返し用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f^{(n)}(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{a+n}}=0=f^{(n)}(\xi_n^n)$. $f^{(n)}(x)$ は $[0,\infty)$ で微分可能でだから，再び $\boxed{1}$ により，$\exists\,\xi_{n+1}^{n+1}\in[\xi_n^n,\infty)$ s.t. $f^{(n+1)}\left(\xi_{n+1}^{n+1}\right)=0$. 即ち，$P_{n+1}\left(\xi_{n+1}^{n+1}\right)=0$.

同様に，$\exists\,\xi_1^{n+1}\in(-\infty,\xi_1^n]$ s.t. $f^{(n+1)}\left(\xi_1^{n+1}\right)=0$.

以上より，$P_{n+1}(x)=0$ は相異なる $n+1$ 個の実根 $\xi_1^{n+1}<\xi_2^{n+1}<\cdots<\xi_n^{n+1}<\xi_{n+1}^{n+1}$ を持って，$P_n(x)=0$ の相異なる n 個の根を隔離する． □

$\boxed{3}$ [1°]“Hermite の多項式” $\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} := (-1)^n H_n(x)e^{-x^2}$ とすれば，

(1) $H_n(x)$ は n 次の多項式.
(2) $H_n(x)=0$ の根は n 個の相違なる実根.
(3) $H_n(x)=0$ の根は $H_{n-1}(x)=0$ の根によって隔離される.

Proof. $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\left(\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)\right)$ である．

(1) n に関する帰納法で示す．

$$H_1(x)=(-1)e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2}=-e^{x^2}\cdot(-2x)e^{-x^2}=2x.$$

だから，$n=1$ で成立する．

*6 $P_2(x)=0$ の根は $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2a+1}}$ だから，確かに $P_1(x)=0$ の根 $x=0$ を隔離している．

$H_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次の多項式であると仮定する．

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}\right)\right)=(-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\left((-1)^{n-1}H_{n-1}(x)\cdot e^{-x^2}\right)\right)$$
$$=(-1)^{2n-1}e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\left(H_{n-1}(x)\cdot e^{-x^2}\right)\right)=-e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\left(H_{n-1}(x)\cdot e^{-x^2}\right)\right)$$
$$=-e^{x^2}\left(H'_{n-1}(x)e^{-x^2}-2x\cdot H_{n-1}(x)e^{-x^2}\right)=2xH_{n-1}(x)-H'_{n-1}(x).$$

帰納法の仮定により，$H_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次の多項式だから，$2xH_{n-1}(x)$ は n 次で，$H'_{n-1}(x)$ は $n-2$ 次だから，$H_n(x)$ は n 次の多項式である．

(2)(3) を同時に示す．$H_1(x)=2x$.

$$H_2(x)=(-1)^2e^{x^2}\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2}\right)=e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\left(-2xe^{-x^2}\right)\right)=e^{x^2}\left(-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}\right)=4x^2-2\ .$$

よって，$H_1(x)=0$ の根 $x=0$ は，$H_2(x)=0$ の根 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を隔離する．しかも，いずれも実根である．

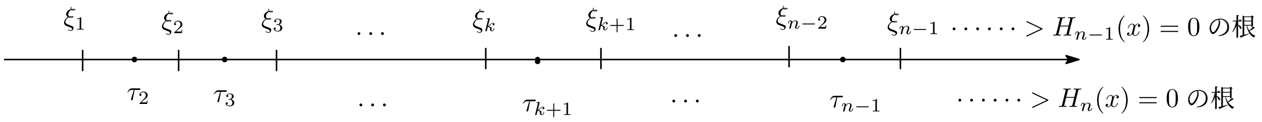
次に，$H_{n-1}(x)=0$ が相違なる実根 $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{n-1}$ を持つとする．$f_n(x):=\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ とおくと，$f_n(x)=(-1)^nH_n(x)e^{-x^2}$ であり，$f_n(x)=0$ と $H_n(x)=0$ は同一の根を有する．

$\xi_k<\xi_{k+1}\ \ (k=1,2,\ldots,n-2)$ に対して，仮定より $H_{n-1}(\xi_k)=H_{n-1}(\xi_{k+1})=0$ だから，$f_{n-1}(\xi_k)=f_{n-1}(\xi_{k+1})=0$ である．$f_{n-1}(x)$ は実数上で微分可能であるから，Rolle の定理より，

$$\xi_k<\ \exists\,\tau_{k+1}<\xi_{k+1}\quad \texttt{s.t.}\quad f'_{n-1}(\tau_{k+1})=0\ .$$

$f_n(x)$ の定義より $f_n(x)=f'_{n-1}(x)$ だから，$f_n(\tau_{k+1})=0$ 即ち，$H_n(\tau_{k+1})=0$ を得る．

ここまで，



となり，$H_n(x)=0$ の根としては相異なる $n-2$ 個の実根 $\tau_2,\tau_3,\ldots,\tau_{n-1}$ が見つかった．

次に仮定により，$H_{n-1}(\xi_1)=0$ 即ち，$f_{n-1}(\xi_1)=0$ であり，$f_{n-1}(x):=(-1)^{n-1}H_{n-1}(x)e^{-x^2}$ かつ，$H_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次の多項式であるから，L'Hopital の定理を $n-1$ 回適用して，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f_{n-1}(x)=0$. よって，第 2 章問題 $\boxed{1}$ により，$\exists\,\tau_1<\xi_1$ $\texttt{s.t.}$ $f'_{n-1}(\tau_1)=0$ 即ち $f_n(\tau_1)=0$. よって，$H_n(\tau_1)=0$ を得る．

同様にして，$\xi_{n-1}<\ \exists\,\tau_n$ $\texttt{s.t.}$ $f'_{n-1}(\tau_n)=0$ 即ち $f_n(\tau_n)=0$. よって，$H_n(\tau_n)=0$ を得る．

以上により，確かに $H_n(x)=0$ の根は相異なる n 個の実根を持ち，それらは $H_{n-1}(x)=0$ の根によって隔離されている． □

$\boxed{3}$ [2°] "Laguerre の多項式"　$e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}):=L_n(x)$ とするとき，

(1) $L_n(x)$ は n 次の多項式.
(2) $L_n(x)=0$ の根は n 個の相違なる正の実根.
(3) $L_n(x)=0$ の根は $L_{n-1}(x)=0$ の根によって隔離される．

Proof. (1) について "Leibnitz の規則" により，$\dfrac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(n-k)}(e^{-x})^{(k)}$. ここで, $(x^n)'=nx^{n-1}, (x^n)''=n(n-1)x^{n-2}, (x^n)'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3},\cdots$ によって，

$$(x^n)^{(n-k)}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-k-1))\,x^{n-(n-k)}=n(n-1)(n-2)\cdots(k+1)\cdot x^k=\frac{n!}{k!}x^k.$$

$(e^{-x})' = (-1)e^{-x}, (e^{-x})'' = (-1)^2 e^{-x}, \ldots$ によって $(e^{-x})^{(k)} = \underbrace{(-1)(-1)\cdots(-1)}_{k\text{ 個}} \cdot e^{-x} = (-1)^k \cdot e^{-x}$.

$\therefore \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k e^{-x} = e^{-x} n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$. よって,

$$L_n(x) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \ . \tag{3}$$

を得る.

(2)(3) を同時に示す. 最初に,

$$L_n(x) = xL'_{n-1}(x) + (n-x)L_{n-1}(x) \tag{4}$$

を示す.

$$L_n(x) = e^x \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^n e^{-x}\right) \right) = e^x \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\left(x^{n-1} e^{-x}\right) x \right) \right) \tag{5}$$

さて, ここで再び "Leibnitz の規則" により,

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\left(x^{n-1} e^{-x}\right) x \right) &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^{n-1} e^{-x}\right) x + \binom{n-1}{1} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left(x^{n-1} e^{-x}\right) x' \\ &\quad + \binom{n-1}{2} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \left(x^{n-1} e^{-x}\right) \cdot 0 + \cdots + \binom{n-1}{n-2} \frac{d}{dx} \left(x^n e^{-x}\right) \cdot 0 + \binom{n-1}{n-1} x^{n-1} e^{-x} \cdot 0 \end{aligned}$$

だから最初の式 (5) において,

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^{n-1} e^{-x}\right) \right) x + (n-1) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left(x^{n-1} e^{-x}\right) \right) \\ &= e^x \frac{d}{dx} \left(e^{-x} L_{n-1}(x) x\right) + e^x (n-1) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^{n-1} e^{-x}\right) \\ &= e^x \left(-e^{-x} L_{n-1}(x) x + e^{-x} L'_{n-1}(x) x + e^{-x} L_{n-1}(x)\right) + e^x (n-1) e^{-x} L_{n-1}(x) \\ &= -L_{n-1}(x) x + L'_{n-1}(x) x + L_{n-1}(x) + (n-1) L_{n-1}(x) \\ &= xL'_{n-1}(x) + (n-x) L_{n-1}(x) \ . \qquad \text{となり示された.} \end{aligned}$$

さて, 帰納法により証明する. $n=1$ のときは式 (3) により,

$$\begin{aligned} L_1(x) &= 1! \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = \binom{1}{0} \frac{(-1)^0}{0!} x^0 + \binom{1}{1} \frac{(-1)^1}{1!} x^1 = 1 - x \ . \\ L_2(x) &= 2! \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = 2! \left(\binom{2}{0} \frac{(-1)^0}{0!} x^0 + \binom{2}{1} \frac{(-1)^1}{1!} x^1 + \binom{2}{2} \frac{(-1)^2}{2!} x^2 \right) \\ &= 2 \left(1 - 2x + \frac{1}{2} x^2\right) = x^2 - 4x + 2 \end{aligned}$$

だから, $L_1(x) = 0$ の根 $x = 1$ は $L_2(x) = 0$ の根 $x = 2 \pm \sqrt{2}$ を隔離しており, いずれも正の実根で $L_1(x) = 0$ は 1 個, $L_2(x) = 0$ は 2 個の根を持っているから主張は成立している.

帰納法の仮定における

$$L_{n-1}(x) = 0 \text{ の正根を, } 0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_i < \cdots < \xi_{n-1} < +\infty \ \text{ とする.}$$

式 (4) により,

$$L_n(\xi_i) = \xi_i \cdot L'_{n-1}(\xi_i) + (n - \xi_i) \cdot \underbrace{L_{n-1}(\xi_i)}_{=0} = \xi_i \cdot L'_{n-1}(\xi_i)$$

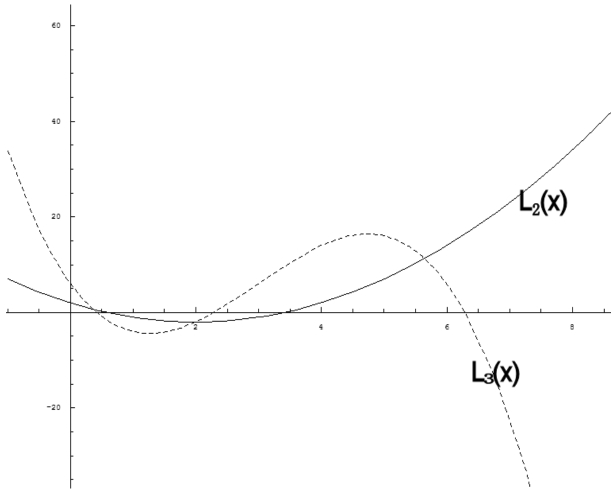


図 1　Mathematica で描画した $L_2(x)$ と $L_3(x)$.

$L_{n-1}(x)=0$ の根 ξ_{i-1}とξ_i について $L_{n-1}(x)=0$ は重根を有しないから，x が ξ_{i-1}からξ_i に変わるとき，$L_{n-1}(x)$ は増加から減少，又は減少から増加に変わるので（ξ_{i-1}からξ_i の間で極大又は極小），$x=\xi_{i-1},\xi_i$ での微分係数について互いに異符号である．

$$\texttt{i.e.}\quad L'_{n-1}\left(\xi_{i-1}\right)\cdot L'_{n-1}\left(\xi_i\right)<0\ .$$

又，仮定により $\xi_{i-1}>0,\xi_i>0$ であったから，

$$L_n\left(\xi_{i-1}\right)\cdot L_{n-1}\left(\xi_i\right)=\xi_{i-1}\cdot\xi_i\cdot L'_{n-1}\left(\xi_{i-1}\right)\cdot L'_{n-1}\left(\xi_i\right)<0\ .$$

$L_n(x)$ は (ξ_{i-1},ξ_i) で連続だから，ξ_{i-1} と ξ_i との間で少なくとも 1 つの根を持つ．従って，全部で少なくとも $n-2$ 個の正の実根を有する．

$$\texttt{i.e.}\quad 0<\xi_{i-1}<\exists\,\tau_i<\xi_i\ \texttt{s.t.}\ L_n\left(\tau_i\right)=0\ \ \texttt{for i}=2,3,\ldots\texttt{n}-1$$

0　ξ_1　ξ_2　ξ_3　$\ldots$　ξ_k　ξ_{k+1}　$\ldots$　ξ_{n-2}　ξ_{n-1}　$\cdots\cdots>L_{n-1}(x)=0$ の根

τ_2　τ_3　$\ldots$　τ_{k+1}　$\ldots$　τ_{n-1}　$\cdots\cdots>L_n(x)=0$ の根

以下，残り 2 根が $(\xi_{n-1},+\infty)$ と，$(0,\xi_1)$ で存在することを示す．
さて式 (3) から，

$$L_n(x)=(-x)^n+\cdots+n!$$
$$L_{n-1}(x)=(-x)^{n-1}+\cdots+(n-1)!$$

であることに注意する．

$(\xi_{n-1},+\infty)$ において，$L'_{n-1}\left(\xi_{n-1}\right)>0$ の場合（$L'_{n-1}\left(\xi_{n-1}\right)<0$ も同様に示される．）は，$L_n\left(\xi_{n-1}\right)=\xi_{n-1}L'_{n-1}\left(\xi_{n-1}\right)>0$ である．n が偶数であると仮定すると，$L'_{n-1}\left(\xi_{n-1}\right)>0$ だから，$L_{n-1}(x)$ は最後の根 ξ_{n-1} においては増加することになるが，それは $L_{n-1}(x)=-x^{n-1}+\cdots$ が最高次の係数が負である奇数次の多項式であることに反する（グラフの形状を考えれば分かる．）から，n は奇数である．このとき，$L_n(x)=-x^n+\cdots$ であるから，十分大なる R に対して $L_n(R)<0$ である．よって $L_n\left(\xi_{n-1}\right)>0$ と合わせて，$L_n(x)=0$ は $(\xi_{n-1},+\infty)$ において少なくとも 1 つの根 τ_n を持つ．

ここまでで，$L_n(x)=0$ は少なくとも $n-1$ 個の正実根を持った．$L_n(x)$ は式 (3) から実係数の n 次多項式であるから，残り 1 個も実根である．式 (3) から $L_n(0)=n!>0,L_{n-1}(0)=(n-1)!>0$ であり，

$L_{n-1}(x)=0$ は $(0,\xi_1)$ では根を持たないので，$L_{n-1}(x)$ が偶数次の多項式であることから，$x=\xi_1$ では，単調減少でなければばならない． i.e. $L'_{n-1}(\xi_1)<0$ ． $\therefore$ $L_n(\xi_1)=\xi_1 L'_{n-1}(\xi_1)<0$. $L_n(0)=n!>0$ であったから，$0<\ \exists\,\tau_1<\xi_1$ s.t. $L_n(\tau_1)=0$.

これで n 個の正実根 $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$ を持ち，それらは $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1}$ によって隔離されていることが分かった. □

4 $f(x)$ は (a,b) で第 n 階まで微分可能で, $x\to a+0$ のとき,

$$f(x)\to l\ ,\ f'(x)\to l_1\ ,\ f''(x)\to l_2\ ,\cdots,\ f^{(n)}(x)\to l_n$$

とする.

$$f(a)=l\ とするならば，右への微分商として,\ f'(a)=l_1, f''(a)=l_2,\cdots,f^{(n)}(a)=l_n\ .$$

Proof. まず, 次を示す.

(a,b) で微分可能で, $x\to a+0$ のとき, $f(x)\to l$, $f'(x)\to l_1$ とする．改めて $f(a)=l$ と定義するならば, 右への微分商として, $f'(a)=l_1$,

> $\because$ 仮定により，$\lim_{x\to a+0}f(x)=l=f(a)$. よって $f(x)$ は $x=a$ で右への連続．よって, $[a,b)$ で $f(x)$ が微分可能であるから, $[a,b)$ で $f(x)$ は連続．今, $a<x<b$ なる x について閉区間 $[a,x]$ を考えると, $f(x)$ は $[a,x]$ で連続, 開区間 (a,x) で微分可能．よって平均値の定理を $[a,x]$ に適用して, [定理 23] と同様にして, $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ なる $a<\exists\,\xi<x$. $x\to a+0$ のとき, $\xi\to a+0$ だから, 仮定により $f'(\xi)\to l_1$ $(\xi\to a+0)$. これは $\lim_{x\to a+0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l_1$. を示す．この左辺は a の右への微分商 $f'(a)$ である.
>
> すなわち, $x=a$ で右への微分商 $f'(a)$ が存在して $f'(a)=l_1$.

まず, 右への微分商 $f''(a)=l_2$ を示す．$f'(x)$ を前主張の $f(x)$ に当てはめて, $f'(a)=l_1$. また $f''(x)\to l_2$ であるから, 前主張によって, $f''(a)=l_2$ が成立する．これを繰り返して $f^{(n)}(a)=l_n$ を得る. □

5 ある領域において f_x , f_y は連続で，点 (a,b) を除いては f_{xy} は連続とする（すなわち点 (a,b) では不連続かもしれないのである）．然らば,

$$f_{xy}(a,b)=\lim_{y\to b}f_{xy}(a,y)=\lim_{y\to b}f_{yx}(a,y)$$
$$f_{yx}(a,b)=\lim_{x\to a}f_{xy}(x,b)=\lim_{x\to a}f_{yx}(x,b)$$

但し，右辺の lim が存在すると仮定するときに，左辺の lim が存在して等式が成り立つのである.

Proof. [*7] D を 2 次元実空間上の領域で $\mathbb{R}\ni h,k$ とし，$(A,B),(a,b),(a+h,b+k),(a+\theta h,b+\theta' k)$ を領域 D 内の点 $(0<\theta<1, 0<\theta'<1)$ で，2 点 (A,B) と (a,b) は異なるとする.

$$\begin{aligned}\Delta(A,B,h,k)&:=f(A+h,B+k)-f(A+h,B)-f(A,B+k)+f(A,B)\\ \varphi(x)&:=f(x,B+k)-f(x,B)\end{aligned}$$

[*7] 以下の証明は基本的に “青空学園数学科” 解析概論読者会のメンバー「緑川氏」が証明したものを単に清書しただけである.

とおく．

点 (A,B) の近傍で f_x が存在するから，$\varphi'(x)=f_x(x,B+k)-f_x(x,B)$ ．平均値の定理より，$\varphi(A+h)-\varphi(A)=h\cdot\varphi'(A+\theta h)$ $(0<\theta<1)$ ．よって，

$$\Delta(A,B,h,k)=\varphi(A+h)-\varphi(A)=h\cdot\varphi'(A+\theta h)=h\left(f_x(A+\theta h,B+k)-f_x(A+\theta h,B)\right).$$

更に $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy}$ の存在も仮定されているので，

$$\Delta(A,B,h,k)=hkf_{xy}(A+\theta h,B+\theta' k)\quad(0<\theta'<1)\tag{6}$$

を得る．

一方 $k\fallingdotseq 0$ のとき，

$$\frac{\Delta(A,B,h,k)}{k}=\frac{f(A+h,B+k)-f(A+h,B)}{k}-\frac{f(A,B+k)-f(A,B)}{k}\ .\tag{7}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_y$ の存在が仮定されているので，(7) で $k\to 0$ とすると，

$$\Delta(A,B,h):=\lim_{k\to 0}\frac{\Delta(A,B,h,k)}{k}=f_y(A+h,B)-f_y(A,B)\ .\tag{8}$$

f_{xy} は (A,B) で連続だから，(6) で $k\to 0$ とすると，

$$\Delta(A,B,h):=\lim_{k\to 0}\frac{\Delta(A,B,h,k)}{k}=h\cdot f_{xy}(A+\theta h,B)\quad(0<\theta<1)\ .\tag{9}$$

(8) (9) より，

$$\frac{f_y(A+h,B)-f_y(A,B)}{h}=f_{xy}(A+\theta h,B)\ .\tag{10}$$

(10) で $h\to 0$ とすると f_{xy} は点 (A,B) で連続だから，(10) の右辺 $\displaystyle\lim_{h\to 0}f_{xy}(A+\theta h,B)=f_{xy}(A,B)$ が存在するので，この値が (10) の左辺を $h\to 0$ とした時の極限値 $f_{yx}(A,B)$ が存在して，

$$f_{yx}(A,B)=f_{xy}(A,B)\tag{11}$$

を得る．

ところで，(11) は $(A,B)\fallingdotseq(a,b)$ で成立するので，

$$A\fallingdotseq a\ \text{のとき，}\ f_{yx}(A,b)=f_{xy}(A,b)\tag{12}$$
$$B\fallingdotseq b\ \text{のとき，}\ f_{yx}(a,B)=f_{xy}(a,B)\tag{13}$$

従って，(12) により，左辺の $f_{yx}(A,b)$ の $A\to a$ における極限値が存在すれば，設問の第二式を得る．

同様に (13) により $f_{yx}(a,B)$ の $B\to b$ における極限値が存在すれば，設問の第一式を得る． □

6 $f(x,y)=x^2\mathrm{Arctan}\dfrac{y}{x}-y^2\mathrm{Arctan}\dfrac{x}{y}$ の $x=y=0$ における第二階の偏微分商を求めよ．（もちろん $x=0$ または $y=0$ のとき $f(x,y)$ の値は $\displaystyle\lim_{x\to 0}$ または $\displaystyle\lim_{y\to 0}$ で補充されたものとする．）

Proof. 簡単な計算により，$f_x(x,y)=2x\mathrm{Arctan}\dfrac{y}{x}-y$ であり，更に x,y の交代性により $f_y(x,y)=y-2y\mathrm{Arctan}\dfrac{x}{y}$ を得る．

更に微分して，$f_{xx}(x,y)=2\mathrm{Arctan}\dfrac{y}{x}-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ ，$f_{yy}(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}-2\mathrm{Arctan}\dfrac{x}{y}$ ．

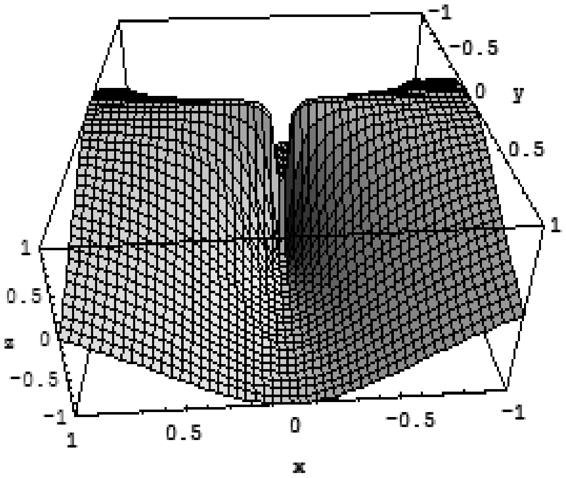


図 2　Mathematica で描画した $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

及び $f_{xy}(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = f_{yx}(x,y)$. 問題 $\boxed{5}$ を適用して,

$$f_{xx}(0,0) \overset{\text{def}}{\equiv} \lim_{x\to 0} f_{xx}(x,0) = \lim_{x\to 0}\left(2\text{Arctan } 0 - \frac{0}{x^2}\right) = 0$$
$$f_{yy}(0,0) \overset{\text{def}}{\equiv} \lim_{y\to 0} f_{yy}(0,y) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^2} - 2\text{Arctan } 0\right) = 0$$

しかし，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ において $y = kx$ とおくと，$\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ となり傾き k に依存する結果となるので，$(x,y) \to (0,0)$ の時の $f_{xy}(0,0)$ や $f_{yx}(0,0)$ は存在しない．従って f_{xy}は $(0,0)$ で不連続である．

□

$\boxed{7}$ **＜合成函数の微分＞**　$F(u)$ において $u = \varphi(x)$ とすれば,

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}F(u) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i}\frac{1}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_n!}F^{(k)}(u)\left(\frac{\varphi'}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\varphi^{(n)}}{n!}\right)^{i_n} .$$

ここで内の和は, $i_1 \geqq 0, i_2 \geqq 0, \ldots, i_n \geqq 0, i_1+i_2+\cdots+i_n = k, i_1+2\cdot i_2+\cdots+n\cdot i_n = n$ なる整数 i の全ての組み合わせの上にわたる．但し $0! = 1$ とする．(Fáa di Bruno)

Proof. $F(u) = F(\varphi(x))$ を $x = x_0$ のまわりに Taylor 展開して,

$$F(\varphi(x)) = F(\varphi(x_0)) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_0}(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nF}{dx^n}\right)_{x=x_0}(x-x_0)^n + \cdots . \tag{14}$$

$u_0 = \varphi(x_0)$ とおいて, 更に u_0 のまわりに展開して,

$$F(u) = F(u_0) + (u-u_0)F'(u_0) + \cdots \frac{1}{n!}(u-u_0)^n F^{(n)}(u_0) + \cdots . \tag{15}$$

更に $u = \varphi(x)$ を $x = x_0$ で展開すると,

$$u - u_0 = (x-x_0)\varphi'(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(x-x_0)^n\varphi^{(n)}(x_0) + \cdots . \tag{16}$$

さて (16) を (15) へ代入して $(x-x_0)^n$ の項のみを集め, (14) の項と比較することで, $\dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}F(u)$ を求めることにする.

(15) の一般項 $\dfrac{1}{k!}(u-u_0)^k F^{(k)}(u_0)$ の $(u-u_0)$ へ (16) を代入すると,

$$\frac{1}{k!}\Bigl(\underline{(x-x_0)\,\varphi'(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}(x-x_0)^n\,\varphi^{(n)}(x_0)}+\cdots.\Bigr)^k F^{(k)}(u_0)$$

を得る．このうち (14) の係数と比較するために $(x-x_0)^n$ の項のみを集めるので, ____ の部分の展開のみが必要になる．残りは $(x-x_0)^{n+p}\quad(p\geqq 1)$ で必要ない． ____ の部分に k 次の多項定理を適用すると[*8],

$$\sum\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}(x-x_0)^{i_1}(\varphi'(x_0))^{i_1}\left(\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right)^{i_2}(\varphi''(x_0))^{i_2}\cdots\left(\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right)^{i_n}\left(\varphi^{(n)}(x_0)\right)^{i_n}$$

となり多項定理の性質から, $i_1+i_2+\cdots+i_n=k$. この $\sum$ の中で $(x-x_0)$ については, $(x-x_0)^n$ の形のものをだけを集めるので, それらを $c_{n,k}$ とおくと,

$$c_{n,k}=\left(\sum\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}(x-x_0)^{i_1+2i_2+\cdots+ni_n}\left(\frac{\varphi'}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\varphi^{(n)}}{n!}\right)^{i_n}\right)F^{(k)}(u_0)$$

となる．そして $\dfrac{1}{k!}c_{n,k}$ が (15) での一般項中, $(x-x_0)^n$ の係数である．また, $i_1+2i_2+\cdots+ni_n=n$. さて, k は (15) の一般項を表すから, $(x-x_0)^n$ の形のものは, $k=1,2,\ldots,n$ に亘って存在するので, それらも集めて

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}(x-x_0)^n\left(\frac{\varphi'}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\varphi^{(n)}}{n!}\right)^{i_n}F^{(k)}(u_0)\right).$$

ここまで $i_1+i_2+\cdots+i_n=k$, $i_1+2i_2+\cdots+ni_n=n$ が条件である.

整理して $(x-x_0)^n$ を除いて比較して,

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}F(\varphi(x_0))=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}F^{(k)}(u_0)\left(\frac{\varphi'}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\varphi^{(n)}}{n!}\right)^{i_n}\right).$$

x_0 は x へ, u_0 は u へ置き換えて,

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}F(\varphi(x))=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}F^{(k)}(u)\left(\frac{\varphi'}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\varphi^{(n)}}{n!}\right)^{i_n}\right).$$

但し, $i_1\geqq 0, i_2\geqq 0,\ldots,i_n\geqq 0$, $i_1+i_2+\cdots+i_n=k$, $i_1+2i_2+\cdots+ni_n=n$ が条件である. □

8 **（Newton の近似法）** $[a,b]$ において $f''(x)>0$, $f(a)>0$, $f(b)<0$ ならば,

$$a_1:=a-\frac{f(a)}{f'(a)}\ ,\ a_2:=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}\ ,\ \ldots$$

とするとき, $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ は $[a,b]$ における $f(x)=0$ のただ一つの根に収束する.
$f(a)<0$, $f(b)>0$ ならば $b_1=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)},\ldots$ をとる. $f''(x)<0$ ならば, $-f(x)$ を $f(x)$ に代用する.

[*8] $(a+b+c)^n=\sum\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ において, 例えば $a+b$ に関する展開だけが欲しければ, $p+q+r=n, p\geqq 0, q\geqq 0, r\geqq 0$ において, $r=0$ という p,q,r の組み合わせを取ればいいということ.

Proof. 2次導関数 $f''(x)$ が存在するので $f(x)$ は連続で $f(a)\cdot f(b)<0$ により，中間値の定理から $f(x)=0$ は $[a,b]$ で少なくとも一つの根を有するが，それが $[a,b]$ で唯一つであることを示す．2根 c_1, c_2 があると仮定し $a<c_1<c_2<b$ とするならば，$f(c_1)=0, f(c_2)=0$ だから Rolle の定理により，$c_1<\exists\, c<c_2$ s.t. $f'(c)=0$.

さて $f''(x)>0$ であるから，$f'(x)$ は連続かつ単調増加なので，$x<c$ では $f'(x)<0$ である．又，$c<x$ においては $f'(x)>0$ だから $f(x)$ は単調増加である．よって $c<c_2<b$ においては，$f(c_2)<f(b)$ だが $f(c_2)=0$ であったから $0<f(b)$ を得るが，これは最初の仮定 $f(b)<0$ に反する．

以上により $[a,b]$ での根は存在して，それは唯一つである．

次に $n=1,2,\ldots$ において，

$$a_{n-1}<a_n<b\ ,\ f\left(a_n\right)>0\ ,\ f'\left(a_n\right)<0 \tag{17}$$

が成立することを数学的帰納法を用いて示す．但し $a_0=a$ とする．

最初に $n=1$ のとき，$a<a_1<b$, $f\left(a_1\right)>0$, $f'\left(a_1\right)<0$ を示す．

平均値の定理より $a<\exists\,\xi<b$ s.t. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ である．仮定により，

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0 \tag{18}$$

であり $f''(x)>0$ により $f'(x)$ は単調増加なので，$\xi>a$ から $f'(\xi)>f'(a)$ で，$f'(\xi)<0$ であったから，

$$f'(a)<0 \tag{19}$$

$\therefore\ a_1=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}>a$. よって，

$$a<a_1 \tag{20}$$

同じく平均値の定理より，$a<\exists\,\tau<a_1$ s.t. $\dfrac{f(a_1)-f(a)}{a_1-a}=f'(\tau)$ より，$f\left(a_1\right)=f(a)+\left(a_1-a\right)f'(\tau)=f(a)-\dfrac{f(a)}{f'(a)}\cdot f'(\tau)$. 両辺を $f(a)$ で割って，

$$\frac{f(a_1)}{f(a)}=1-\frac{1}{f'(a)}\cdot f'(\tau)=\frac{f'(a)-f'(\tau)}{f'(a)}>0$$

| $\because$ (19) より $f'(a)<0$ で，$a<\tau$ と $f'(x)$ が単調増加であることより，$f'(a)<f'(\tau)$.

よって $\dfrac{f(a_1)}{f(a)}>0$ を得るが，仮定より $f(a)>0$ であったから，

$$f(a_1)>0 \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
b-a_1&=b-a+\frac{f(a)}{f'(a)}=\frac{f(b)-f(a)}{f'(\xi)}+\frac{f(a)}{f'(a)}\quad (\because (18))\\
&>\frac{f(b)-f(a)}{f'(\xi)}+\frac{f(a)}{f'(\xi)}=\frac{f(b)}{f'(\xi)}\ .\\
&\left(\because\ 0>f'(\xi)>f'(a)\text{ から }\frac{1}{f'(\xi)}<\frac{1}{f'(a)}\text{ となり，}f(a)>0\text{ より，}\frac{f(a)}{f'(\xi)}<\frac{f(a)}{f'(a)}\right)
\end{aligned}$$

$\therefore\ b-a_1>\dfrac{f(b)}{f'(\xi)}>0$ ($\because$ (18) と仮定 $f(b)<0$)

$$\therefore\quad b>a_1 \tag{22}$$

平均値の定理から，$a_1 < \exists\, \xi_1 < b$ s.t. $\dfrac{f(b)-f(a_1)}{b-a_1} = f'(\xi_1) > f'(a_1)$ ($\because$ $f'(x)$ は単調増加)．(21) と仮定 $f(b)<0$ により $f'(\xi_1)<0$ だから，

$$f'(a_1) < 0 \tag{23}$$

以上，(20) (22) (21) (23) により $n=1$ のときは証明された．

次に (17) が成立すると仮定する．

帰納法の仮定から，$a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(f(a_n))}{f'(a_n)} > a_n$ によって，

$$a_n < a_{n+1} \tag{24}$$

平均値の定理から，

$$a_n < \exists\, \xi < b \text{ s.t. } \frac{f(b)-f(a_n)}{b-a_n} = f'(\xi)\ .$$

$f'(x)$ は単調増加だから $f'(\xi_n) > f'(a_n)$ で，更に帰納法の仮定から $f(b)<0$，$f(a_n)>0$ により，

$$0 > \frac{f(b)-f(a_n)}{b-a_n} = f'(\xi) > f'(a_n) \tag{25}$$

(24) により，平均値の定理から，

$$a_n < \exists\, \tau < a_{n+1} \text{ s.t. } f(a_{n+1}) = f(a_n) + f'(\tau)(a_{n+1}-a_n) = f(a_n) - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \cdot f'(\tau)$$

両辺を $f(a_n)$ で割って，

$$\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = 1 - \frac{1}{f'(a_n)} \cdot f'(\tau) = \frac{f'(a_n)-f'(\tau)}{f'(a_n)} > 0\ .(\because \text{ 帰納法の仮定と } f'(x) \text{ が単調増加故.})$$

再び帰納法の仮定により $f(a_n)>0$ だったから，

$$f(a_{n+1}) > 0 \tag{26}$$

$$b - a_{n+1} = b - a_n + \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = \frac{f(b)-f(a_n)}{f'(\xi)} + \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} > \frac{f(b)}{f'(\xi)} > 0 \quad (\because\ (25))$$

$$\therefore\ b > a_{n+1} \tag{27}$$

再び平均値の定理と $f'(x)$ が単調増加であることから，

$$a_{n+1} < \exists\, \xi_{n+1} < b \text{ s.t. } \frac{f(b)-f(a_{n+1})}{b-a_{n+1}} = f'(\xi_{n+1}) > f'(a_{n+1})\ .$$

$b > a_{n+1}$ と $f(b)<0$ 及び，(26) によって，

$$0 > \frac{f(b)-f(a_{n+1})}{b-a_{n+1}} = f'(\xi_{n+1}) > f'(a_{n+1})\ .$$

$$\therefore\ f'(a_{n+1}) < 0\ . \tag{28}$$

以上 (24) (27) (26) (28) により，$n+1$ のときも証明された．

さて，$a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b$ であるから，$\{a_n\}$ は単調増加で上に有界だから，$\lim_{n\to\infty} a_n = c$ となる極限値 c が存在する．一方 $f''(x)$ が存在するので $f(x)$，$f'(x)$ は連続であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(f(a_n)) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \quad , \quad \lim_{n\to\infty}(f'(a_n)) = f'\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\ .$$

が成立する．$\{a_n\}$ の定義,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

によって,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n - \frac{f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)}{f'\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)}$$

だから，$c = c - \dfrac{f(c)}{f'(c)}$ より $f(c) = 0$ を得る．以上により全てが証明された．後半は直ちに分かる． □

$\boxed{9}$ 既約有理式[a] $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ の相隣る極値点が，共に極大点ならば，その中間の或る点 a において $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

[a] 比としての $f(x)$ が問題なので，$P(x)$, $Q(x)$ に共通因数があったならば，予め割り算してしまい，互いに素としても一般性を失わない．よって，ここでは $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ は既約であるとした．

Proof. $x = x_1$, $x = x_2$ で相隣る極大点 $f(x_1), f(x_2)$ があるとする $(x_1 < x_2)$．すると開区間 (x_1, x_2) で $Q(a) = 0$ となる根 a が少なくとも 1 つ存在する．

> ∵ 結論を否定して，$x_1 < x < x_2$ なる全ての x について $Q(x) \fallingdotseq 0$ とするならば，閉区間 $[x_1, x_2]$ において $f(x)$ は連続だから $[x_1, x_2]$ の 1 点 ξ において最小値 m をとる．$f(x_1), f(x_2)$ は極大値だから $f(x_1) > m$, $f(x_2) > m$ により，$x_1 < \xi < x_2$.
>
> 次に $f(x) = m$ の根は $P(x) = mQ(x)$ の根なので，それは $P(x), Q(x)$ が多項式であることより，有限個である．よって $\delta > 0$ を ξ と ξ に最も近い $f(x) = m$ の根との距離とすれば，$0 < |x - a| < \delta$ なる全ての x について，$f(x) > f(\xi) = m$. これは $x = \xi$ で極小であることを示す．（あるいは,「$f(\xi)$ が最小値なのだから，その定義より ξ の適当な近傍において $f(\xi)$ は極小値である.」と言っても可.）
>
> しかし，これは x_1, x_2 の間で極値を持たないという仮定に反する．よって，$Q(a) = 0$ となる点 a が存在する $(x_1 < a < x_2)$.

$$\text{次に，}\quad \lim_{x\to a\pm 0} P(x) \fallingdotseq 0\ .$$

> ∵ もし $\lim\limits_{x\to a\pm 0} P(x) = 0$ であるなら，$P(x)$ は多項式だから連続故，$P(a) = 0$. よって $P(x)$ は因数 $x - a$ を持つが，$Q(a) = 0$ より，$Q(x)$ も因数 $x - a$ を持つ．しかし，これは $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ が既約であることに反する．

従って，$\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x\to a\pm 0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ において，$Q(x) \to Q(a) = 0$. $P(x) \to P(a) \fallingdotseq 0$ で有限確定だから，$\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$.

ところが, x_1 は極大値を与えており, x_1, x_2 の間に極値がないから $x_1 < x < a$ なる x については $f'(x) < 0$. これより $f(x)$ が減少函数であるから，$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$.

同様に $a < x < x_2$ において, x_2 が極大値なので $f'(x) > 0$ だから, $x \to a+0$ においては, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$.

$$\therefore\quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\ .$$

即ち，$x=a$ において $f(x)$ は不連続である． □

> **10**
>
> $$f(x,y)=x^4+y^4+6x^2y^2-2y^2 \quad \text{に関して，}$$
>
> [1°] 極値を求めよ．　　　　[2°] $f(x,y)<0$ なる区域の形を研究せよ．

<確認> (x_0,y_0) で極値をとるなら，$f_x(x_0,y_0)=0$ ，$f_y(x_0,y_0)=0$ であることが必要．

(1) $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2>0$ のとき，f_{xx} の正負に従って，$f(x_0,y_0)$ が極小または極大．

(2) $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2<0$ のとき，$f(x_0,y_0)$ は極値でない．

(3) $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=0$ のとき，第 3 階以上の微分を考慮しなければ何も断言出来ない．

（解） [1°] について

$f_x=4x^3+12xy^2$ ，$f_y=4y^3+12x^2y-4y$ ，$f_{xx}=12x^2+12y^2$ ，$f_{yy}=12y^2+12x^2-4$ ，$f_{xy}=24xy$ ．

$f_x=f_y=0$ を解いて $(x,y)=(0,0),(0,\pm1)$ ．よって，極値の候補は $(0,0),(0,\pm1)$ で与えられる．

さて，$F(x,y)=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=\left(12x^2+12y^2\right)\left(12y^2+12x^2-4\right)-(24xy)^2$ において，$F(0,0)=0$ ，$F(0,\pm1)=96>0$ ．$f_{xx}(0,\pm1)=12>0$ なので上記<確認>によって，$(0,\pm1)$ において極小値をとる．

$F(0,0)=0$ だから，このままでは何も言えない．$(0,0)$ では極値をとらない．

> $\because$　$f(x,y)=x^4+y^4+6x^2y^2-2y^2$ において $y=0$ とおくと $f(x,0)=x^4\geqq0$ ．よって点 (x,y) が x 軸にそって原点に近づくとき，原点付近で常に正．
>
> $f(x,y)$ で $x=0$ とおくと，$f(0,y)=y^2\left(y+\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)$ ．よって $-\sqrt{2}<y<\sqrt{2}$ において $f(0,y)\leqq0$ ．従って点 (x,y) が y 軸にそって原点に近づくとき，原点付近で常に負．
>
> 以上より，原点 $(0,0,0)$ のまわりで，$f(x,y)$ は正負いずれの値もとるから $(0,0)$ では極値をとらず，原点 $(0,0,0)$ では極大でも極小でもない．

以上から極小点 $(0,\pm1,-1)$ をとる．

[2°] について[*9]

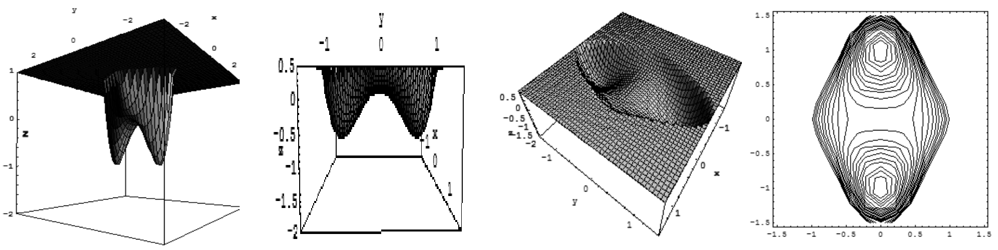


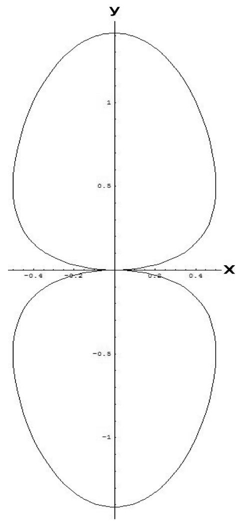
図 3　Mathematica で $f(x,y)=x^4+y^4+6x^2y^2-2y^2$ を描画．

$f(x,y)=0$ とおいて，$x-y$ 平面での切り口を調べると，$x^4+y^4+6x^2y^2-2y^2=0$ において x,y に関して偶函数だから，切り口は x 軸，y 軸，及び原点に関して対称であるから，第一象限での状態を調べる．$x^2=X,y^2=Y$ とおくと $X^2+Y^2+6XY-2Y=0$ ．$(X\geqq0,Y\geqq0)$．$X^2+6XY+Y^2-2Y=0$ を X について解くと，$X=-3Y\pm\sqrt{8Y^2+2Y}$. $\dfrac{dX}{dY}=-3\pm\dfrac{8Y+1}{\sqrt{8Y^2+2Y}}$ ．よって，$\dfrac{dX}{dY}=0$ となるのは $(2Y+1)(4Y-1)=0$ より，$2Y+1>0$ に注意して，$Y=\dfrac{1}{4}$ ．$\therefore$ $y=\pm\dfrac{1}{2}$. y 軸との交点は，$x=0$ とおいて，$y=0,\pm\sqrt{2}$. また，$y=0$ となるのは $x=0$ のときのみ．$Y=\dfrac{1}{4}$ のとき $X=\dfrac{1}{4}$. よって $x=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき $y=\dfrac{1}{2}$. この点で $\dfrac{dX}{dY}=0$ となったから，接線は y 軸に平行である．

[*9] 図 3 において，左から右へ「全体像を下から眺めた」→「正面から眺めて極小値を強調」→「原点付近が極値でない様子（鞍点又は停留点）」→「平面 $z=0$ で切断して等高線を描いた」．図 3 が全てを語っているといっても良いが，手作業で処理をすると，以下のようになる．

第一象限での増減表

y	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
Y	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	2
$\frac{dX}{dY}$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$
X	0	$\nearrow$	極大値 $\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
x	0	$\nearrow$	極大値 $\frac{1}{2}$	$\searrow$	0



Mathematica で $x^4+y^4+6x^2y^2-2y^2=0$ を描画.

$\square$

> $\boxed{11}$ 三角形 ABC の平面上で，三つの頂点からの距離の和が最小である点を求めよ．
> ［注意］微分法によって解き，初等幾何学的方法と比較するとよい．

＜微分による解法＞[*10] $\mathrm{A}\,(x_1,y_1)\,,\mathrm{B}\,(x_2,y_2)\,,\mathrm{C}\,(x_3,y_3)$ とし，平面上の動点を $\mathrm{P}\,(x,y)$ とする．問題は，函数

$$f(x,y) \overset{\text{略記}}{=} f(\mathrm{P}) = \mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} = \sum_{k=1}^{3}\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2} \tag{29}$$

の最小値を求めることに帰着する．

> 最小値の存在について
>
> $\because$ A を中心として半径 $f(\mathrm{A})$ の円 K を作ると，この円の外側にある点 P に対しては，
>
> $$f(\mathrm{P}) > \mathrm{PA} > \mathrm{K}\text{ の半径} = f(\mathrm{A})$$
>
> が成り立つので，最小値があるとすればこの円で囲まれた閉領域 D 内にあるときである．ところが，定理 13（解析概論 p.27）により連続関数 $f(\mathrm{P})$ は閉領域 D で最小値をとる．

(29) は点 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ 以外では微分可能で，

$$f_x(\mathrm{P}) = \sum_{k=1}^{3}\frac{x-x_k}{\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}} \quad , \quad f_y(\mathrm{P}) = \sum_{k=1}^{3}\frac{y-y_k}{\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}} \tag{30}$$

となる．

従って $f(\mathrm{P})$ の最小値を与える P の候補としては，

(a) $f_x\,(\mathrm{P}_0) = f_y\,(\mathrm{P}_0) = 0$ となる点 P_0　　(b) $f(\mathrm{P})$ が微分できない点 $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$

の 4 つである．(a) における解 $\mathrm{P}_0\,(x_0,y_0,z_0)$ があるとしても，それを求めるのはかなり大変なので，幾何学的に考える．$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{A}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{B}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{C}}$ が x 軸の正方向となす角を α,β,γ とする．必要に応じて $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ の名称を交

[*10] 以下は，羽鳥裕久（著）「数学への誘い」「第 5 章 : 3 点への距離の和を最小に」(from p.50 to p.56)（培風館）を書き直したに過ぎない．

換することにより，$0^\circ \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \gamma \leqq 360^\circ$ であるとしてよい．(30) を具体的に計算すると，

$$f_x\left(\mathrm{P}_0\right) = -\left(\frac{x_1 - x_0}{\mathrm{P}_0\mathrm{A}} + \frac{x_2 - x_0}{\mathrm{P}_0\mathrm{B}} + \frac{x_3 - x_0}{\mathrm{P}_0\mathrm{C}}\right) = -\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right) = 0$$

$$f_y\left(\mathrm{P}_0\right) = -\left(\frac{y_1 - y_0}{\mathrm{P}_0\mathrm{A}} + \frac{y_2 - y_0}{\mathrm{P}_0\mathrm{B}} + \frac{y_3 - y_0}{\mathrm{P}_0\mathrm{C}}\right) = -\left(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma\right) = 0$$

これら 2 式と $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$ を用いて γ を消去すると，$(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 1$. $\therefore 2{+}2\cos(\beta - \alpha) = 1$ から，$\cos(\beta - \alpha) = -\dfrac{1}{2}$. 同様にして $\cos(\gamma - \beta) = -\dfrac{1}{2}, \cos(360^\circ - \gamma + \alpha) = -\dfrac{1}{2}$. ところで $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ の解は，$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲では $\theta = 120^\circ, 240^\circ$ なので，$\beta - \alpha, \gamma - \beta, 360^\circ - \gamma + \alpha = 120^\circ, 240^\circ$. しかし，これらがいずれも正でその和が 360° であることから，

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta = 360^\circ - \gamma + \alpha = 120^\circ \ .$$

すなわち，

$$\angle \mathrm{AP_0B} = \angle \mathrm{BP_0C} = \angle \mathrm{CP_0A} = 120^\circ \tag{31}$$

でなければならない．[*11] また下図により，P_0 は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部になければならない．

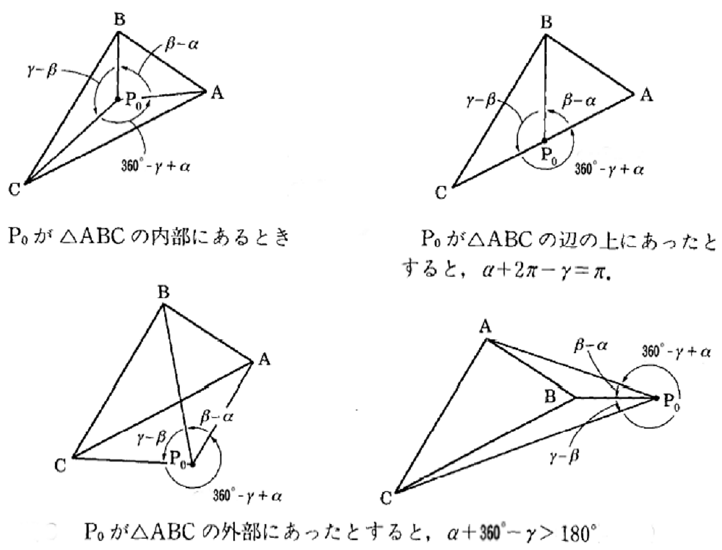


図 4　P_0 は $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部にある

次に P_0 の作図方法を考える．直線 BC に関して $\triangle\mathrm{ABC}$ の反対側に正三角形 BDC およびその外接円を作り，劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ と線分 AD の交点を P_0 とすれば，円周角の定理から $\angle\mathrm{BP_0C} = 120^\circ$ であり，$\angle\mathrm{AP_0B} = 120^\circ$. である（図 5 の左側を参照）．

しかし，図 5 の真中や右側を見てもわかるように，$\angle\mathrm{A}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C} > 120^\circ$ のときには交点が存在しないし，$\angle\mathrm{A}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C} = 120^\circ$ のときには交点はそれぞれ A, B, C と一致する．よって，これらの場合には $f_x = f_y = 0$ を満たす点 P は存在しないから，$f(\mathrm{P})$ の最小値は $f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}), f(\mathrm{C})$ の最小値と一致する．

即ち $\angle\mathrm{A} \geqq 120^\circ$ のときは，BC が $\triangle\mathrm{ABC}$ の最大長だから，$f(\mathrm{A}) = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$ が $f(\mathrm{P})$ の唯一つの最小値である．つまり P は A と一致する．$\angle\mathrm{B} \geqq 120^\circ$ や $\angle\mathrm{C} \geqq 120^\circ$ の場合も同様.

[*11] 仮に，$\beta - \alpha = 240^\circ$ ならば，$(\gamma - \beta) + (360^\circ - \gamma + \alpha) = 120^\circ$ となり，$\gamma - \beta, 360^\circ - \gamma + \alpha$ は 120° や 240° にはならない.

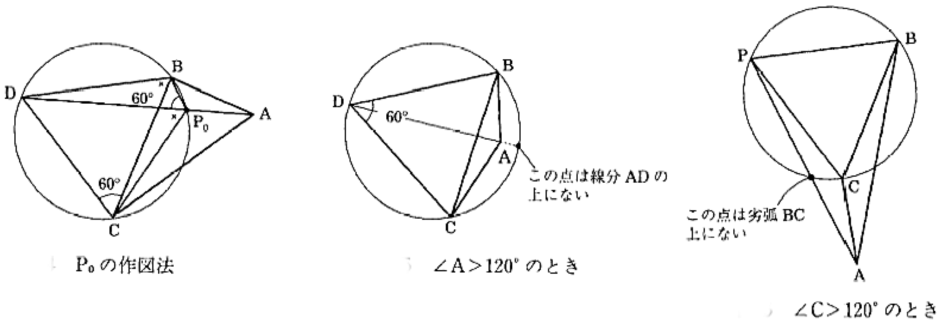
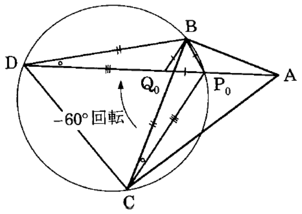


図 5　「P_0 の作図法」と「角が 120° より大」なるとき



次に $\angle \mathrm{A}, \angle \mathrm{B}, \angle \mathrm{C}$ のいずれもが，$< 120^\circ$ の時，$f(\mathrm{P}_0)$ の値と，$f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}), f(\mathrm{C})$ の値を比較してみる必要がある．左図において，$\triangle \mathrm{BCP}_0$ を点 B を中心として -60° 回転して得られる，$\triangle \mathrm{BDQ}_0$ を考える．円周角の定理により，$\angle \mathrm{BCP}_0 = \angle \mathrm{BDA}$ なので，Q_0 は線分 AD 上にある．$\mathrm{BP}_0 = \mathrm{BQ}_0, \angle \mathrm{BP}_0\mathrm{Q}_0 = 60^\circ$ なので，$\triangle \mathrm{BQ}_0\mathrm{P}_0$ は正三角形である．

$$f(\mathrm{P}_0) = \mathrm{P}_0\mathrm{A} + \mathrm{P}_0\mathrm{B} + \mathrm{P}_0\mathrm{C} = \mathrm{AP}_0 + \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0 + \mathrm{Q}_0\mathrm{D} = \mathrm{AD} < \mathrm{AB} + \mathrm{BD} = \mathrm{BA} + \mathrm{BC} = f(\mathrm{B})$$

$\therefore\ f(\mathrm{P}_0) < f(\mathrm{B})$. 同様にして $f(\mathrm{P}_0) < f(\mathrm{A}), f(\mathrm{P}_0) < f(\mathrm{C})$ が分かる．

＜初等幾何による解法＞図 6 からわかるように，$f(\mathrm{P})$ が最小になることは $\triangle \mathrm{ABC}$ の外部の点ではあり得ない．そこで以下，$\triangle \mathrm{ABC}$ で囲まれた閉領域 E を考え，$\mathrm{P} \in E$ とする．

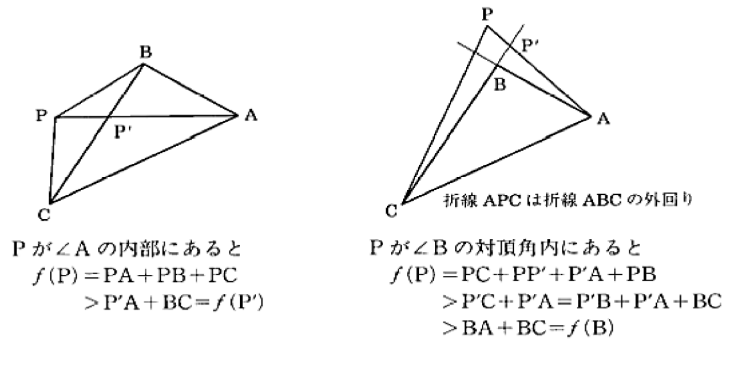
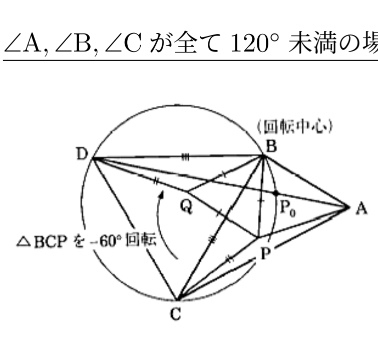


図 6　P が $\triangle \mathrm{ABC}$ の外部にあるとき

$\angle \mathrm{A}, \angle \mathrm{B}, \angle \mathrm{C}$ が全て 120° 未満の場合.



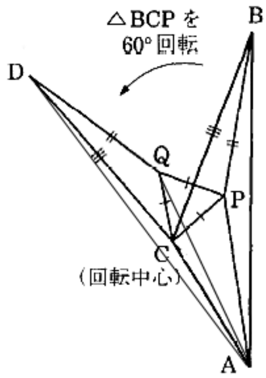
$\mathrm{P} \in E$ として，$\triangle \mathrm{BCP}$ を B を中心として -60° 回転して $\triangle \mathrm{BDQ}$ を作る．但し，P が線分 BC 上にあるときは $\triangle \mathrm{BCP}$（よって $\triangle \mathrm{BDQ}$）は退化した三角形，即ち線分となる．このとき，$\mathrm{P} \in E$ を動かしても D は定点であることに注意.

$f(\mathrm{P}) = \mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} = \mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$（折れ線 APQD の長さ）$\geqq \mathrm{AD}$.

であり，等号は P, Q がともに線分 AD 上にのっている場合である．

即ち P が線分 AD 上にあって $\angle \mathrm{BCP} = \angle \mathrm{BDA}$ のときであり，P が線分 AD と劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の交点 P_0 と一致する場合である．このとき (31) を満たし，$f(\mathrm{P}_0) = \mathrm{AD}$ であり $f(\mathrm{P}_0) < f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}), f(\mathrm{C})$ となることは，前述のとおりである．

次に $\underline{\angle \mathrm{C} \geqq 120^\circ \text{ の場合}}$.



$\mathrm{C} \fallingdotseq \mathrm{P} \in E$ のとき $\triangle\mathrm{BCP}$ を C を中心にして $+60^\circ$ 回転して，$\triangle\mathrm{DCQ}$ を作る．P が線分 BC 上にあれば三角形は退化している（線分）．このとき，P, Q は優角 $\angle\mathrm{ACD}$ [a]内にあるので，$\triangle\mathrm{AQD}$ において，$\mathrm{AC}+\mathrm{CD} < \mathrm{AQ}+\mathrm{QD}$. $\mathrm{AQ} < \mathrm{AP}+\mathrm{PQ}$. $\therefore \mathrm{AC}+\mathrm{CD} < \mathrm{AQ}+\mathrm{QD} < \mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$.

$$\therefore\ \mathrm{AC}+\mathrm{CD} < \mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}\ .$$

ところで，$\mathrm{CD}=\mathrm{BC}, \mathrm{PQ}=\mathrm{PC}, \mathrm{QD}=\mathrm{PB}$ だから，

$$f(\mathrm{C}) = \mathrm{AC}+\mathrm{BC} = \mathrm{AC}+\mathrm{CD} < \mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD} = \mathrm{PA}+\mathrm{PC}+\mathrm{PB} = f(\mathrm{P})$$

となり，$f(\mathrm{C})$ が $f(\mathrm{P})$ の最小値であることが分かる．

[a] $\angle\mathrm{ACD}$ としては 180° 以上をとる．

同様にして，$\angle\mathrm{A} \geqq 120^\circ$ の場合は $f(\mathrm{A})$ が最小値であり，$\angle\mathrm{B} \geqq 120^\circ$ の場合は $f(\mathrm{B})$ が最小値である．□

＜参考文献＞

- 「解析概論研究ノート」高等数学教育研究会
- 青空学園数学科・読者会 “kaiseki-gairon” メーリングリスト（緑川）
- 「微積分演習」（聖文社）北村　毅・松尾吉知・松下朝夫
- 「数学への誘い」（培風館）羽鳥裕久（著）