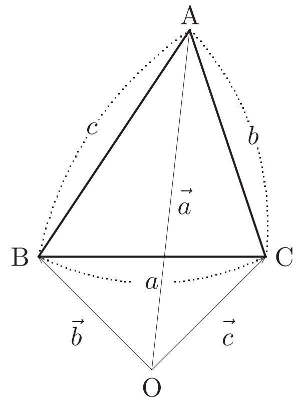
“三角形の五心” のベクトル表記について

水戸一高：額賀俊光

三角形の五心,「重心 “barycenter”」「内心 “incenter”」「垂心 “orthocenter”」「外心 “circumcenter”」「傍心 “excenter”」を △ABC の各頂点の位置ベクトルで表すことを考える。[1]



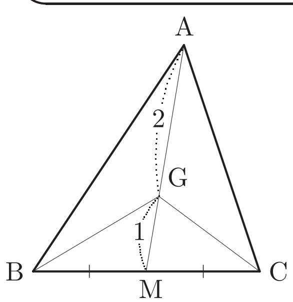
以下，普通の教科書と同様上図のように

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}\ ,\ \overline{\mathrm{BC}} = a\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}\ ,\ \overline{\mathrm{CA}} = b\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}\ ,\ \overline{\mathrm{AB}} = c \qquad \text{と設定する。}$$

重心 “barycenter”

△ABC の重心を G とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3} \qquad \text{である。}$$



Proof. M を辺 BC の中点とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$ だから，この式を原点 O を始点として書き直すと，

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \right) \right)$

これを整理して，

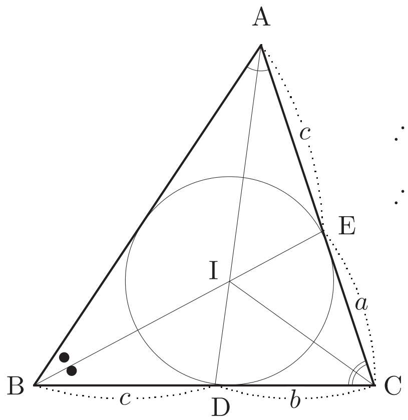
$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$ を得る。 □

内心 “incenter”

△ABC の内心を I とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{a \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + b \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + c \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a + b + c} \qquad \text{である。}$$

[1] 数学オリンピック基礎編 $p.123$〜$p.125$ の表を証明した。



Proof. 左図のように記号を設定するとメネラウスの定理により，

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DI}}{\mathrm{IA}}=1\quad\text{だから，}\quad\frac{c}{a}\cdot\frac{b+c}{c}\cdot\frac{\mathrm{DI}}{\mathrm{IA}}=1$$

$\therefore\ \dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}}=\dfrac{b+c}{a}$ ，従って,$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot\dfrac{b\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}$ となる。

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}$. 後は，この式を原点 O を始点として書き直すと，

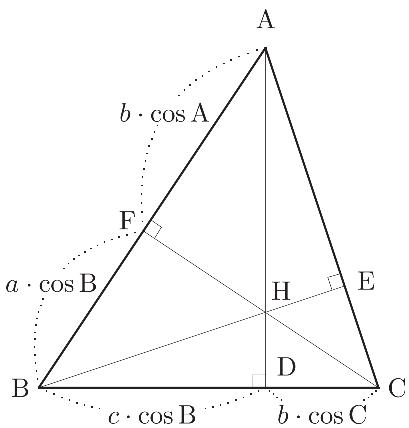
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{b\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+c\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)}{a+b+c}\\&=\frac{a\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}.\end{aligned}$$

□

垂心 “orthocenter”

△ABC の垂心を H とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\tan\mathrm{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\tan\mathrm{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\tan\mathrm{C}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}\qquad\text{である。}$$



Proof) 左図のように記号を設定するとメネラウスの定理により，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}=1\quad\text{だから，}\quad\frac{b\cdot\cos\mathrm{A}}{a\cdot\cos\mathrm{B}}\cdot\frac{c\cdot\cos\mathrm{B}+b\cdot\cos\mathrm{C}}{b\cdot\cos\mathrm{C}}\cdot\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{HA}}=1$$

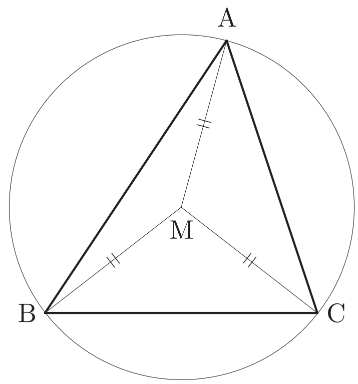
$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HD}}&=\frac{\cos\mathrm{A}\cdot(c\cdot\cos\mathrm{B}+b\cdot\cos\mathrm{C})}{a\cdot\cos\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}\\&=\frac{\cos\mathrm{A}\cdot(2\mathrm{R}\cdot\sin\mathrm{C}\cdot\cos\mathrm{B}+2\mathrm{R}\cdot\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C})}{2\mathrm{R}\cdot\sin\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}\\&=\frac{\dfrac{\cos\mathrm{A}\cdot\sin\mathrm{C}\cdot\cos\mathrm{B}+\cos\mathrm{A}\cdot\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}{\cos\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}}{\dfrac{\sin\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}{\cos\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}}\\&=\frac{\tan\mathrm{C}+\tan\mathrm{B}}{\tan\mathrm{A}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\frac{\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}\cdot\frac{b\cdot\cos\mathrm{C}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\cdot\cos\mathrm{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{c\cdot\cos\mathrm{B}+b\cdot\cos\mathrm{C}}\\&=\frac{\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}\cdot\frac{2\mathrm{R}\cdot\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\mathrm{R}\cdot\sin\mathrm{C}\cdot\cos\mathrm{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2\mathrm{R}\cdot\sin\mathrm{C}\cdot\cos\mathrm{B}+2\mathrm{R}\cdot\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}\\&=\frac{\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}\cdot\frac{\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\sin\mathrm{C}\cdot\cos\mathrm{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\sin\mathrm{C}\cdot\cos\mathrm{B}+\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}\\&=\frac{\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}\cdot\frac{\dfrac{\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}{\cos\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{\sin\mathrm{C}\cdot\cos\mathrm{B}}{\cos\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\dfrac{\sin\mathrm{C}\cdot\cos\mathrm{B}}{\cos\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}+\dfrac{\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}{\cos\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{C}}}\\&=\frac{\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}\cdot\frac{\tan\mathrm{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\tan\mathrm{C}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}\\&=\frac{\tan\mathrm{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\tan\mathrm{C}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}\end{aligned}$$

これを原点 O を始点として書き直せば，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\ =\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\tan\mathrm{B}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\tan\mathrm{C}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)}{\tan\mathrm{A}+\tan\mathrm{B}+\tan\mathrm{C}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\tan \mathrm{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \tan \mathrm{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \tan \mathrm{C} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}$ を得る。□

次に “オイラー線” を用いると，外心 M，重心 G，垂心 H の間には $\overrightarrow{\mathrm{MH}} = 3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{MG}}$ の関係にあるから $2\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ となる。そこで外心では図形を用いずに計算だけから出してみよう。



外心 “circumcenter”

△ABC の外心を M とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\sin 2\mathrm{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \sin 2\mathrm{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \sin 2\mathrm{C} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}} \qquad \text{である。}$$

$\because$まず準備として正弦・余弦定理から

$$\begin{aligned}
\tan \mathrm{A} &= \frac{\sin \mathrm{A}}{\cos \mathrm{A}} = \frac{a}{2\mathrm{R}} \cdot \frac{1}{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{abc}{\mathrm{R} \cdot \left(b^2 + c^2 - a^2\right)} \\
\sin 2\mathrm{A} &= 2 \cdot \sin \mathrm{A} \cdot \cos \mathrm{A} = 2 \cdot \frac{a}{2\mathrm{R}} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{2\mathrm{R}bc}.
\end{aligned}$$

と変形しておく。

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) - \frac{\tan \mathrm{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \tan \mathrm{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \tan \mathrm{C} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}} \\
&= \frac{(\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\tan \mathrm{C} + \tan \mathrm{A}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + (\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C}}{2 \cdot (\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C})} &= \frac{\sin 2\mathrm{A}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}} \\
\frac{\tan \mathrm{C} + \tan \mathrm{A}}{2 \cdot (\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C})} &= \frac{\sin 2\mathrm{B}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}} \\
\frac{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B}}{2 \cdot (\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B} + \tan \mathrm{C})} &= \frac{\sin 2\mathrm{C}}{\sin 2\mathrm{A} + \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{C}}
\end{aligned}$$

となることを示せば証明は終わる。第１式が成立することを示そう（残りの２式も同様に示せる）。

$$\begin{aligned}
\frac{\tan \mathrm{B}+\tan \mathrm{C}}{2\cdot(\tan \mathrm{A}+\tan \mathrm{B}+\tan \mathrm{C})} &= \frac{\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}}{2\cdot\left(\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)} \\
&= \frac{a^2\left(a^2-b^2-c^2\right)}{a^4-2a^2\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2-c^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

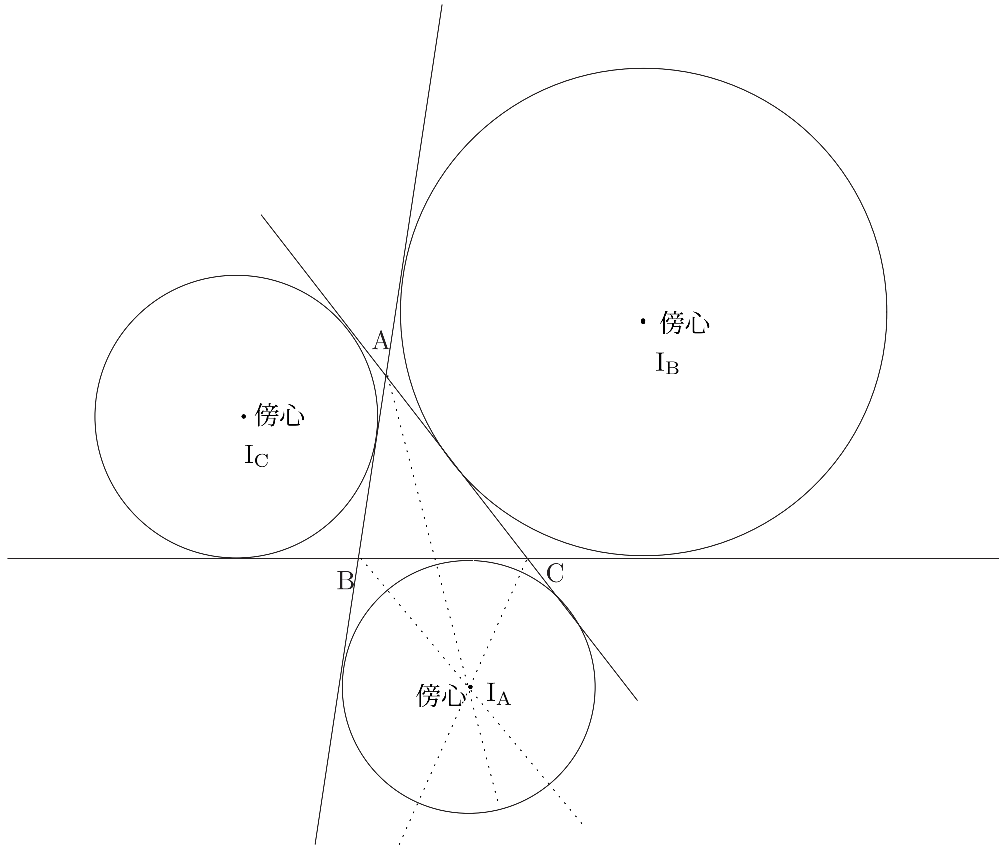
$$\begin{aligned}
\frac{\sin 2\mathrm{A}}{\sin 2\mathrm{A}+\sin 2\mathrm{B}+\sin 2\mathrm{C}} &= \frac{\dfrac{a\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2\mathrm{R}bc}}{\dfrac{a\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2\mathrm{R}bc}+\dfrac{b\left(c^2+a^2-b^2\right)}{2\mathrm{R}ca}+\dfrac{c\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2\mathrm{R}ab}} \\
&= \frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)+b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)+c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)} \\
&= \frac{a^2\left(a^2-b^2-c^2\right)}{a^4-2a^2\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2-c^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

よって確かに $\dfrac{\tan \mathrm{B}+\tan \mathrm{C}}{2\cdot(\tan \mathrm{A}+\tan \mathrm{B}+\tan \mathrm{C})}=\dfrac{\sin 2\mathrm{A}}{\sin 2\mathrm{A}+\sin 2\mathrm{B}+\sin 2\mathrm{C}}$ が成立した。□

傍心 “excenter”

$\triangle$ABC の傍心を $\mathrm{I_A}, \mathrm{I_B}, \mathrm{I_C}$ とするとき,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OI_A}} &= \frac{-a\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{-a+b+c} \\
\overrightarrow{\mathrm{OI_B}} &= \frac{a\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-b\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a-b+c} \\
\overrightarrow{\mathrm{OI_C}} &= \frac{a\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-c\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b-c} \quad \text{となる。}
\end{aligned}$$



Proof. $\angle\mathrm{C}, \angle\mathrm{B}$ の外角の二等分線のベクトル方程式は t, u を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CI_A}} &= t\cdot\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}\right)=t\cdot\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{b}\right)\\ \overrightarrow{\mathrm{BI_A}} &= u\cdot\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}\right)=u\cdot\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{c}\right)\quad \text{となる。}\end{aligned}$$

原点 O を始点としてそれぞれを書き直せば，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI_A}} &= -\frac{t}{b}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(1-\frac{t}{a}+\frac{t}{b}\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots①\\ \overrightarrow{\mathrm{OI_A}} &= -\frac{u}{c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\frac{u}{a}+\frac{u}{c}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{u}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{t}{b}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(1-\frac{t}{a}+\frac{t}{b}\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{u}{c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\frac{u}{a}+\frac{u}{c}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{u}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が一次独立であることを利用するために，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ でまとめると，

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{b}-\frac{t}{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{t}{a}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) &= \left(\frac{u}{a}-1\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\left(1-\frac{u}{a}+\frac{u}{c}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\ \therefore \frac{t}{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{t}{b}-\frac{t}{a}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(1-\frac{u}{a}+\frac{u}{c}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{u}{a}-1\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立であるから

$$\frac{t}{a}=1-\frac{u}{a}+\frac{u}{c}\ \ \text{かつ}\ \ \frac{t}{b}-\frac{t}{a}=\frac{u}{a}-1\quad\text{を得る。}$$

これを t, u を未知数とした連立方程式として解くと，

$$t=-\frac{ab}{a-b-c}\quad,\quad u=-\frac{ac}{a-b-c}.$$

これを ① へ代入すると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI_A}} &= \frac{a}{a-b-c}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{b}{a-b-c}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{c}{a-b-c}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{-a}{-a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{b}{-a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{c}{-a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{-a\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{-a+b+c}.\end{aligned}$$

他の $\overrightarrow{\mathrm{OI_B}}, \overrightarrow{\mathrm{OI_C}}$ も同様に示される。 □

複素数表示

同様のことを "複素数表示" する。$\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{C}(\gamma)$ として結果のみを示す。[2]

重心 : $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

内心 : $\dfrac{|\beta-\gamma|\cdot\alpha+|\gamma-\alpha|\cdot\beta+|\alpha-\beta|\cdot\gamma}{|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha|+|\alpha-\beta|}$

垂心 : $\dfrac{\bar{\alpha}(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha+\beta)+\bar{\beta}(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)+\bar{\gamma}(\beta-\alpha)(\beta-\gamma+\alpha)}{\alpha\left(\bar{\beta}-\bar{\gamma}\right)+\beta\left(\bar{\gamma}-\bar{\alpha}\right)+\gamma\left(\bar{\alpha}-\bar{\beta}\right)}$

外心 : $\dfrac{|\alpha|^2(\beta-\gamma)+|\beta|^2(\gamma-\alpha)+|\gamma|^2(\alpha-\beta)}{\bar{\alpha}(\beta-\gamma)+\bar{\beta}(\gamma-\alpha)+\bar{\gamma}(\alpha-\beta)}$

傍心 : $\dfrac{-|\beta-\gamma|\cdot\alpha+|\gamma-\alpha|\cdot\beta+|\alpha-\beta|\cdot\gamma}{-|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha|+|\alpha-\beta|}$,
$\dfrac{|\beta-\gamma|\cdot\alpha-|\gamma-\alpha|\cdot\beta+|\alpha-\beta|\cdot\gamma}{|\beta-\gamma|-|\gamma-\alpha|+|\alpha-\beta|}$,
$\dfrac{|\beta-\gamma|\cdot\alpha+|\gamma-\alpha|\cdot\beta-|\alpha-\beta|\cdot\gamma}{|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha|-|\alpha-\beta|}$

以上

[2]「複素数と幾何学」梅沢敏夫・後藤生　共著　培風館 1993 $p.13$〜$p.15$ より。