

授業実践例⑤ グラフから読み取る～微分法・対数法則も視野に入れて～

実施日 ①2015年8月23日(日) 産業能率大授業フォーラム(河合塾千草校)
②2015年8月24日(月) 神奈川県立港北高校

内容

- 校歌を再現する(アイスブレイク) ①②
- 微分の意味を探る ②
- 自然現象や社会現象に現れる一様倍変化法則 ①②

授業の目標

数学の概念や定理を数学の中から、社会の中で意味のあるものとして捉える

1 オープニングアイスブレイク(校歌を再現する)

- 大野中学校の校歌の1番から3番の歌詞を文節ごとに切ってバラバラにしたカードを各グループに配ります(写真)。
 - 繋がりや構造に注目してグループで校歌を再現します(2分)。
 - 各グループでアイランドキーパーを決め、それ以外の方は、他のグループの活動から情報を集めます(1分)。
 - 再び、グループ内で検討を加えます。
- ※ 校歌の出だしの部分は示しています。



<授業を終えて>(千草会場)

6人一組30グループという大人数でのALは大変です。そこで、急遽CT(クリエイティブチーム)を結成して授業に入りました。CTは京都精華大学の筒井洋一先生から教わった手法です。

この活動は、校歌を再現する過程で、「青木山並み」に続くのは「麗しく」ではないかという、「横のつながり」を意識すること(微分概念につながる)と、全体が七五調で構成され、最後は七七で結ばれるなどといった「構造を考える」ことを目標としています(グラフの見方につながる)。まあ、数学的活動と無理やりこじつけているわけですが(笑)。

また、活動の仕方として、グループワーク後にシェアをする時間を稼ぐために(何せ30グループ180人なので)、ワールドカフェ方式で、アイランドキーパー(説明役)を決め、他の人は自由に他のグループを覗いて情報を仕入れるという方法をとりました。



クリエイティブチーム



グループで協力する



他の班を覗く (シェア)



まとめる



正解発表

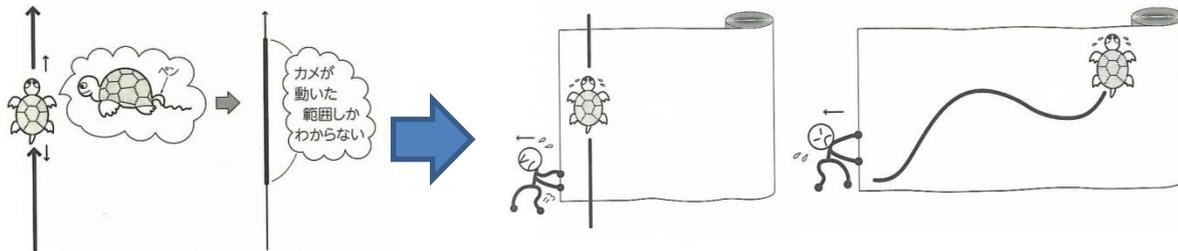


30 チーム中 3 チームが正解!

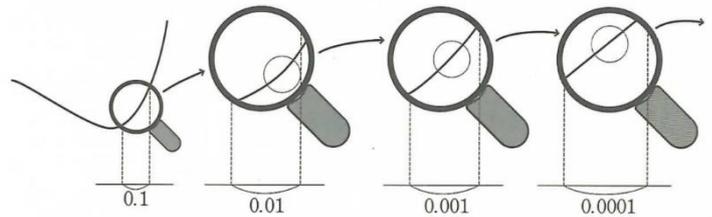
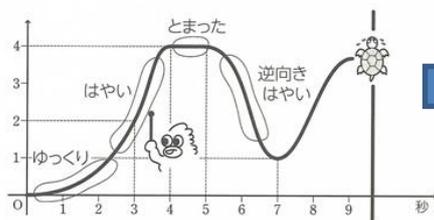
2 微分の意味を探る

- (1) 説明 ザウルス君を使って微分の意味を説明する
- (2) 活動① グループで協力してグラフを描く
- (3) 活動② 他のグループのグループと交換してどんな運動をしていたか話し合う
- (4) 活動③ サンプルグラフを見て、グループで解析しよう

※ 本時は時間の関係で(2)(3)を省略します。



微分の意味を探る

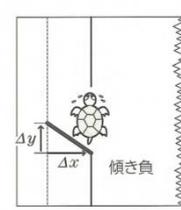
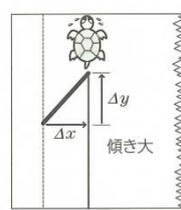
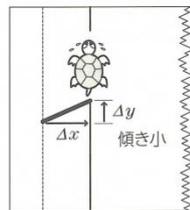
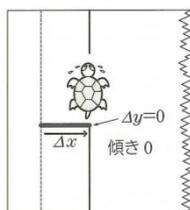


カメラは止まっている

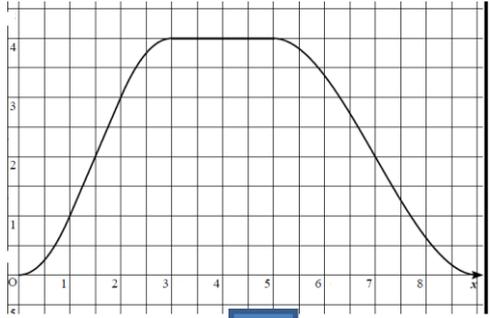
カメラが上にゆっくり動いた

カメラが上に速く動いた

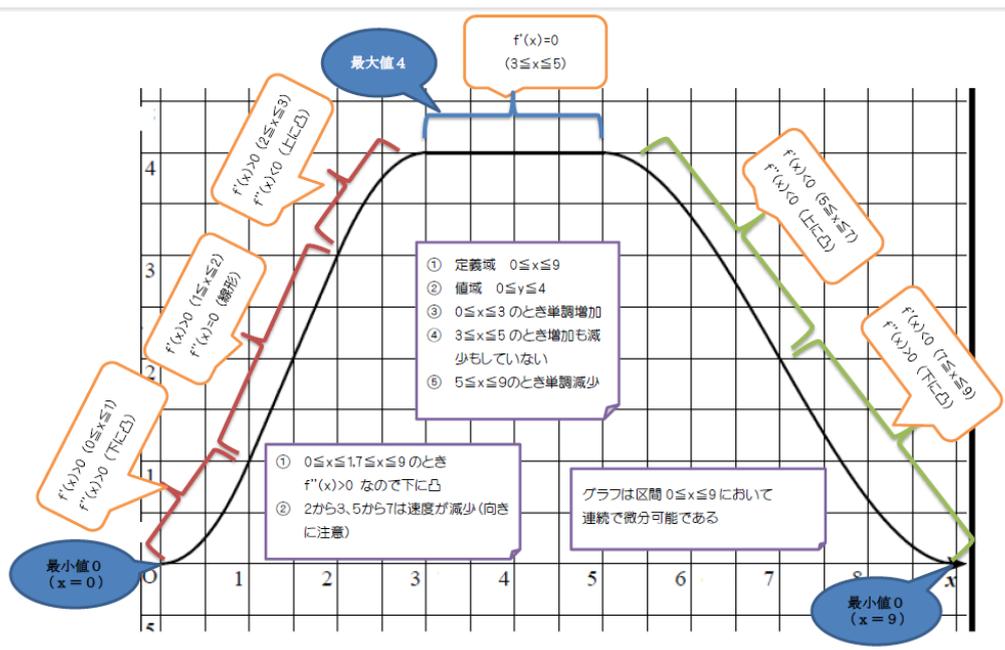
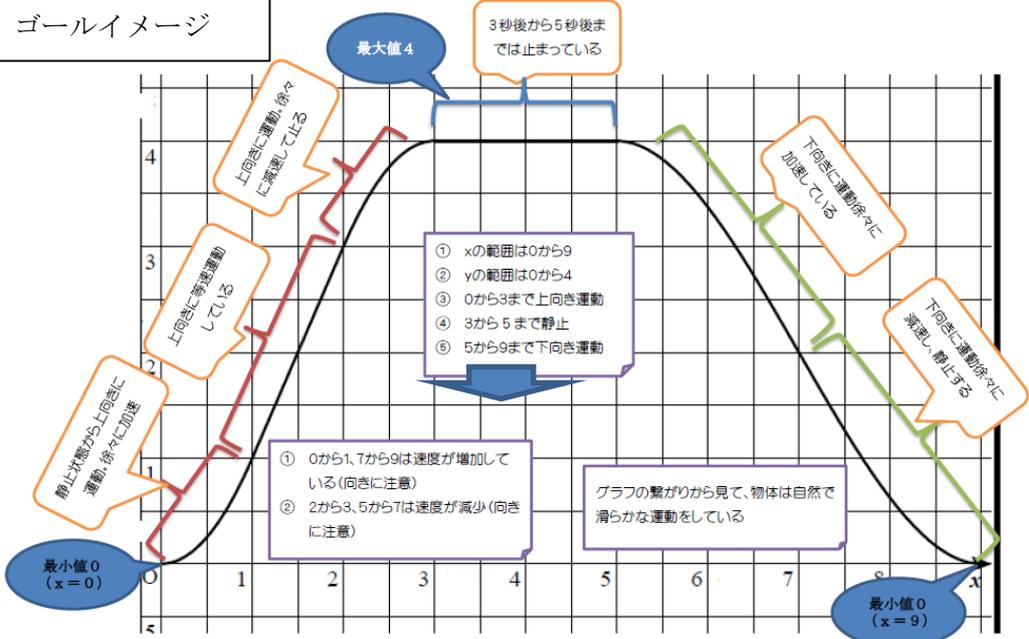
カメラは下向きに動いた
(向きは変えずにバックステップ)



サンプルグラフ



ゴールイメージ



<授業を終えて> (千草会場)

この授業は、微分の導入のときにいつも行っているものです。直線運動するザウルス君の動きを、下に敷いた模造紙を1秒間に10cmのペースで左から右に動かすというアイデアによって解析します。ザウルス君は前に進んだり、速く進んだり、ゆっくり進んだり、止ったり、逆向きに進んだりします(時々鳴きます)。結果として滑らかな軌跡(グラフ)が得られますが、そこから「時間と位置」の関係だけでなく、自然と、曲線の変化の具合に着目され「時間と速さ」の関係に気づきます。更に、ある瞬間の速度は、その曲線上の接線の傾きとして表現できることを納得してゴールです。

私たちは、数学で扱う関数だけに限らず、一般に、変化する物事について論じる際、「現在の状態」(関数の値)と、「変化する様子」(微分)の両面から判断する必要があります。「**現在の状況から、このまま進んでいくと、どういう結果になるだろう**」という文脈の中の「このままいくと」にあたるのが「微分」です(ここが、校歌を復元するアイスブレイクと関連するところ)。

さて、今回は、ALの研修会でもあり、数学の教員が180人中60人だったので、「微分に市民権を」という裏テーマも掲げてみました。

微分概念を「ある瞬間のザウルス君が内包している追いかける力」などと捉えれば、物事には「外側から観察・測定できる量」だけでなく、「内包されている見えない量」も併せて観ることが大切であるという見識にも繋がるのではないかと思います。例えば、期末テストの点数は、その時点での「関数の値」です。でも、ペーパーテストの点数だけで、能力を決めつけるのではなく、彼が内包している見えない能力のようなものを見る必要があります。例えば、「点数は低かったけれど、意欲満々なので、将来はきっと伸びる要素がある」と評価することもあるだろうし、「点数は良かったけれど、生徒たちは授業をあまり楽しそうにしていない。少し授業を見直した方がいいかも」と自身の授業評価を行うことにつながったりするかもしれません。知識や技能だけでなく、意欲なども評価せよと言われてはいますが、これを私的に言うと、「生徒は関数の値だけでなく、微分も評価しよう」ということになります。このような言い方を許すと、「微分」「導関数」などというタームは、「伸び率」だけでなく、「見えない能力」「潜在的なパワー」などを表現するものとして「ベクトル」のように日常的に使えるかもしれません。などという話を冗談めかしながらしてしまいました。



直線運動するザウルス君



CTに模造紙を動かしてもら



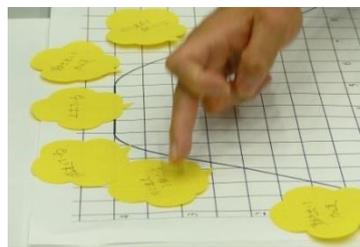
曲線の変化の具合から微分のイメージを持ってもらいます



サンプルグラフの分析



隣の班と交換し評価しあいます



成果物を作成して1つのグループが発表

3 自然現象や社会現象に現れる一様倍変化法則

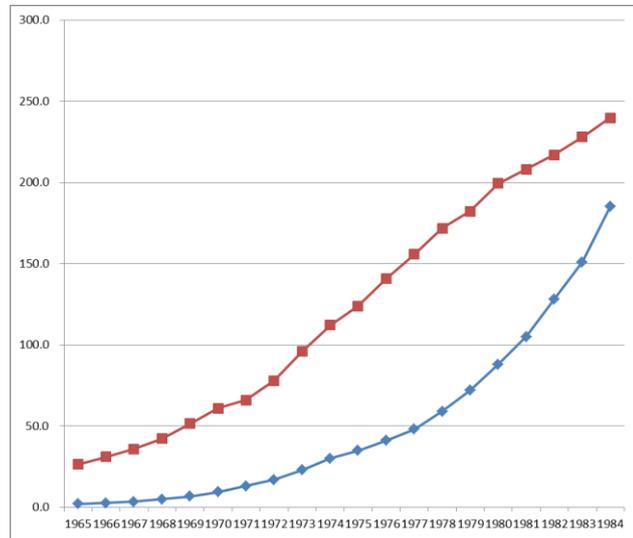
(1) 活動① 次のデータをグループで協力してグラフ化してみよう。

- 左：汎用コンピュータの実働台数（単位 1000 台・1985 コンピュータ白書より）
- 右：国民所得（単位 1000 億円 1985 経済白書より）

年度	実働台数	国民所得
1965	2.0	26.4
1966	2.6	31.1
1967	3.5	35.9
1968	5.0	42.3
1969	6.7	51.4
1970	9.5	61.0
1971	13.0	65.9
1972	17.0	77.9
1973	23.0	95.8
1974	30.0	112.2
1975	35.0	124.0
1976	41.0	140.6
1977	48.0	155.7
1978	59.0	171.8
1979	72.0	182.2
1980	88.0	199.3
1981	105.0	208.2
1982	128.0	216.9
1983	151.0	227.9
1984	185.0	239.8



活動①の結果より

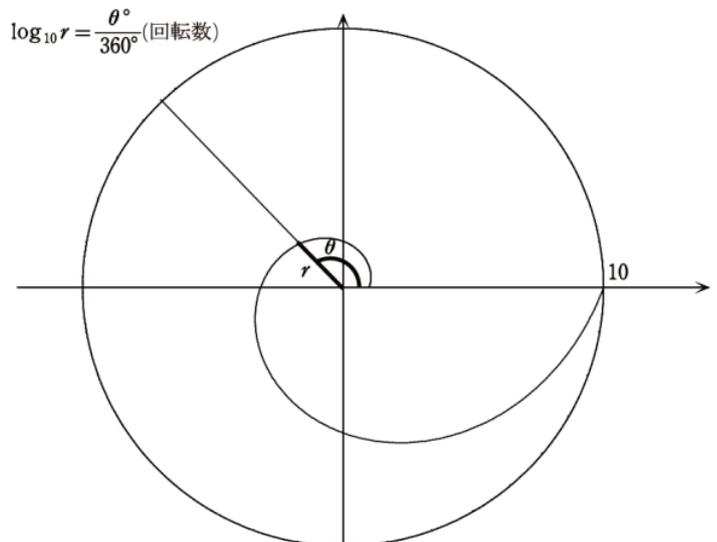
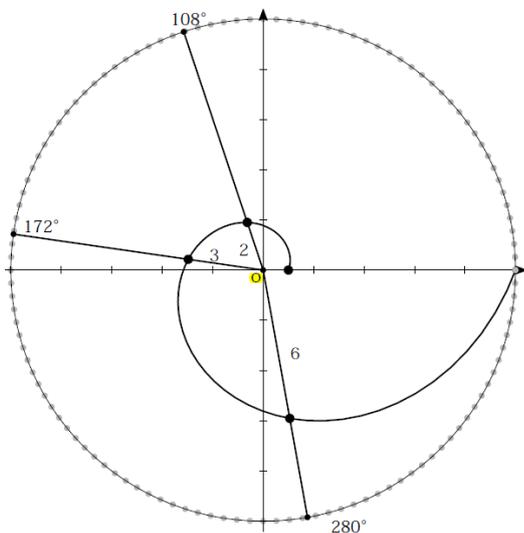


■ 対数の定義

常用対数を、1 回転すると半径が10倍に一様倍変化する対数螺旋を用いて定義します。

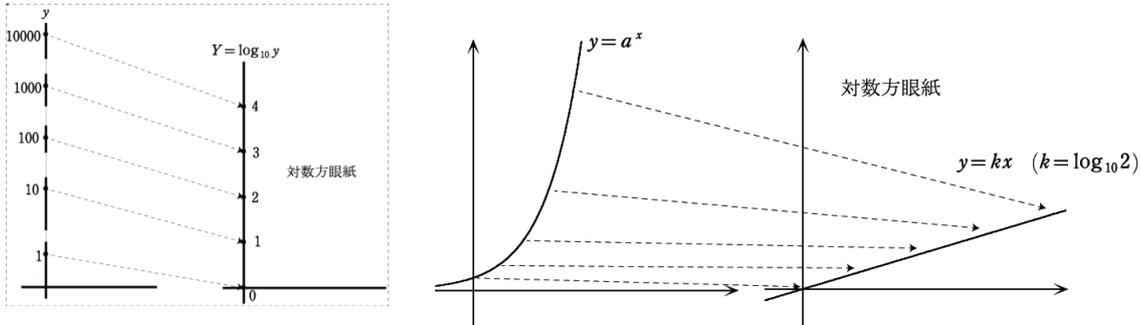
半径が r のときの回転数を $\log_{10} r$ と定義します。 $r = 1$ のときは 0 回転なので、 $\log_{10} 1 = 0$
 $r = 10$ のときは 1 回転なので $\log_{10} 10 = 1$ $r = 100$ のときは 2 回転なので、 $\log_{10} 100 = 2$ ですね。
 $r = 2$ のときは、下図から回転角がだいたい 108° なので、回転数は $\frac{108}{360} = 0.3$ 回転。つまり、

$\log_{10} 2 = 0.3$ と見ることができますね。半径 r のときの回転角が θ° ならば、回転数は $\frac{\theta^\circ}{360^\circ}$ とおけるので、 $\log_{10} r = \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$ となります。



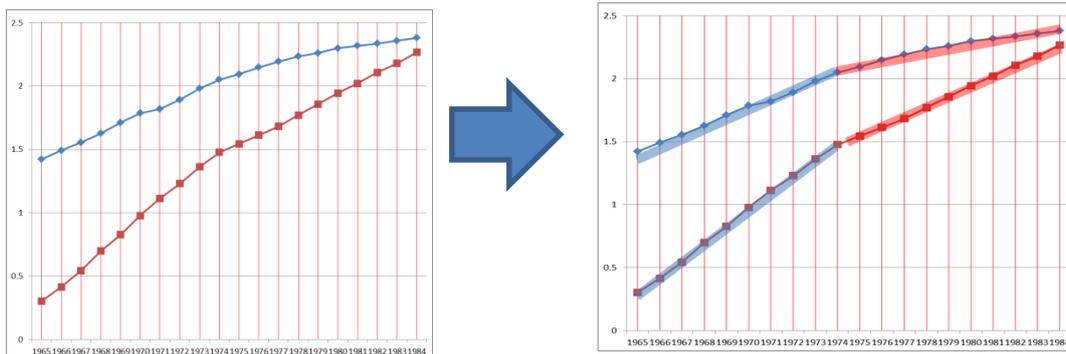
■ 対数方眼紙の利用

$y = f(x)$ が指数関数であるとき、 $g(x) = \log_{10} f(x)$ とすると、 $y = g(x)$ は一次関数になります。ということは、ある現象が指数関数に従うかどうかを調べるには、対数をとった関数が直線になっているかを見ればよいことがわかります。ここで、最初からy軸の目盛を対数目盛りに歪めておけば、常用対数をいちいち調べる必要はなくなります。



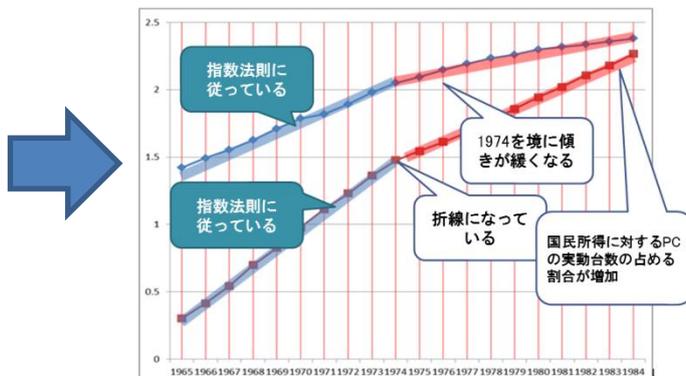
- (2) 活動② 上のデータをグループで協力して対数方眼紙にプロットしてみよう。
 (3) 活動③ グラフからどんなことが読み取れるかグループで話し合ってみよう。

活動②③の結果より



国民所得とPCの実動台数

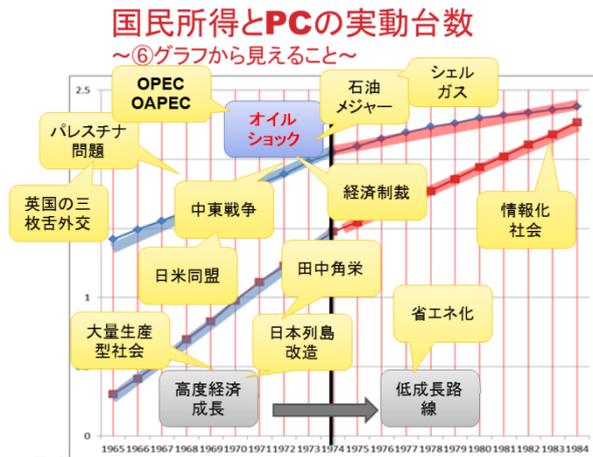
～⑤グラフを描いてみよう(対数方眼紙)～



- (4) 動画 公民の先生との対話動画を視聴(5分)
 (5) 活動④ 動画を観てどのようなことを感じたか話し合ってみよう。



動画より

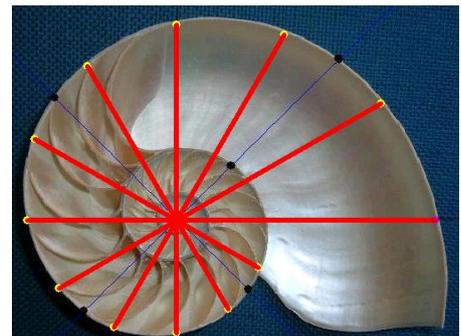


まとめ

■ 数学的にもっと学びたい人のためのトピックス

オウム貝の写真の背景に、時計回りに 30° 回転するごとに $3^{\frac{1}{12}}$ 倍になるような 12 個の動径を作ります。何と！驚くことに、12 本の動径がぴったりと重なりました。つまりオウム貝の中心からの半径は指数関数 3^x に従って一様倍変化していることがわかります。

オウム貝の成長曲線が指数関数的であることは、偶然や神秘という言葉で片付けられるものではなく、「瞬間の成長率はそれまでの蓄積量に比例する」という原理を微分方程式にすることで導かれると考えられます。ピタゴラスは「万物は数である」といいましたが、まさに、数学は自然現象を語る言語であることが改めて認識できます。



上のトピックスを読んで、なぜ、オウム貝の動径の成長は指数関数になるのかを論じてみよう。

【解説】「瞬間の成長率はそれまでの蓄積量に比例する」を微分方程式にしてみると $y' = ky$ となり、これを定数分離法で解くと、指数関数が現れる。

＜授業を終えて＞（千草会場）

この授業の中心である「国民総生産とコンピュータの実動台数」のネタは、東大名誉教授で情報数理科学のパイオニアである森口繁一先生(1916～2002)から教わったものです。数学セミナーにも掲載されたことがあります。

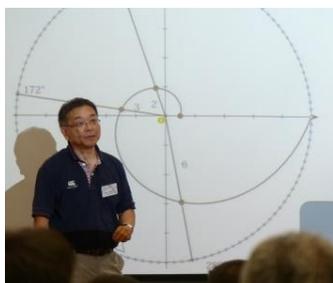
授業のポイントは3つあります。一つは、対数法則を「オウム貝」の一様倍変化性を使って定義したところからです。この方法を水源地にすることで、対数の様々な規則が自明となります。尚、この詳しい説明は、拙著「つながる高校数学」（ベレ出版）にあります。

二つ目は、対数方眼紙の効用についてです。世の中には指数関数で表される現象が多いこと、そして、対数方眼紙上では指数関数が直線として表され、その傾きが指数関数の底に対応していることがポイントです。普通のグラフ用紙と対数方眼紙の両方にグラフを描くことで、対数方眼紙の良さが実

感できるのではないかと思います。

三つ目のポイントは、グラフから社会情勢の変化を読み取る部分です。1974年を境に、グラフは折れ線になっていることがわかるので、1974に何が起こったかの議論に進みます。

ここで、事前に、本校の佐々木教諭との対話の動画を準備していたので、満を持してそれを観てもらいます。オイルショック前後の一連の歴史は、まさに現在の中東問題にもつながるので、様々な授業に展開しうるのではないかと思います。



【授業の一言コメントより（対数方眼紙の授業）】（港北高校）

<数学と日常生活のつながり>

- 自然現象だけでなく、社会現象も数学で解析できるのですね。凄い。
- 数学の内容が実際の物事の中に出てくる、利用されていることを伝えることができる
- 扱うデータが実社会のもので興味深く、分析を社会科教員に協力してもらっていた！
- 対数って実生活と関係していることがわかった。世の中のことを知らないにだめね
- 国民所得とPC台数 実生活の話題から対数グラフの良さを学んだ
- 社会現象が数学で表されることを生徒にグラフを描かせることによって気づかせるという部分が非常に面白いと思いました。
- 数学で対数は、計算操作ばかりに目がいってしまうけれども、社会経済の点で見ると、しっかり活用されているのがわかってよかった
- 数学を通して世の中の事象、自然現象などを解き明かす面白さ
- 数学的に表現されたグラフでオイルショックが現れたところがびっくりでした
- 今学んでいることが、現在何に使われているのか、将来どう関わる可能性があるのかがわかる

<オウム貝による独特な対数の定義>

- 対数法則を図で説明することで（オウム貝）理解しやすくしていた
- 対数そのものの説明がわかりやすかった
- 対数の見方には他にもありますが、今回の回転する半径の角度で考えるのは初めて知りました
- 対数とは何かをとってもわかりやすく伝えてもらえた。高校生の時は理屈がわからず学んでいた。だからすぐに忘れてしまった。

<対数方眼紙の良さ>

- 伸び方の変化をつかむのに対数グラフは使えると思った。
- 社会に出たときにデータ分析など大変役に立つ
- 対数グラフが折れ曲がるってことを気づく人がいるということに気づかされたことがよかった
- 指数関数が社会現象のターニングポイントを示してくれたことに驚いた
- 通常のグラフと対数方眼紙とを対比することで指数の見方がわかり易くなった
- 物事は一つの視点ではないことがわかった