

# 授業実践例① データの分析 (数学 I)

数学 I 「データの分析」の 1 時間目。本時は導入として全体像を示す時間である。特に、アクティブ・ラーニングのポイントである「主体的で対話的で深い学び」という部分について強調して説明する。

## 1 授業ポリシー

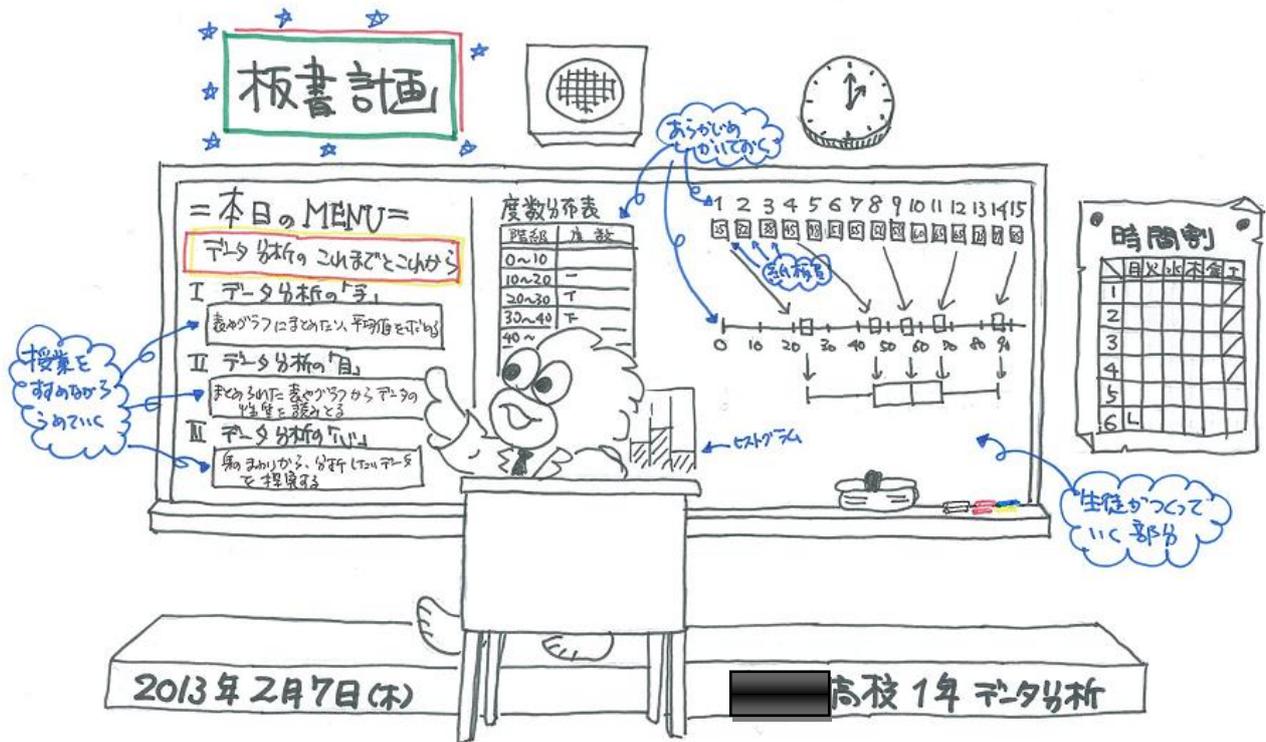
「データの分析」は、今次指導要領改訂の目玉の一つである。この単元は、小中高に配置され系統的な学びを行うようになってきている。しかし、実態を見ると、継続性を意識した指導が見られないことや、技能の習熟に指導の重点が置かれ、データから何を読み取るかという活動が疎かになっている状況が感じられる。そこで、留意するポイントとして以下の 3 点を挙げる。

- ① 小中での既習事項の内容を踏まえること。(校種間のリレーションは深い学びにつながる)
- ② ヒストグラムや箱ひげ図の作表や、代表値、散布度等を求めて終わるのではなく、それを利用して集団の性質について考察し表現することを主眼とすること。(思考・判断・表現を循環させ対話空間を創り出す)
- ③ 生徒が意欲的に取り組むために、身近にある生きたデータを活用すること。(身の回りのデータを見つけ、それを生かすことで、「自分ごと」の間になり、学びに向かう姿勢が育つ)

本時は、小・中学校での既習事項の確認と、それを踏まえて、高校ではどのようなことを学んでいくかという、教材の全体像を俯瞰するような授業を目指す。

また、事前に生徒に簡単なアンケートを行い、その素材を利用して授業を組み立てる。

この高校では教育活動の一環として、毎年 3 年生が、一年間の研究活動の成果を発表する「卒業研究発表会」を行っている。生徒が主体的な学びを行い、その成果を発信する際、データを活用、整理し、分析する力は非常に重要である。そのような意味でも、本時は生きて働く知識を身に着ける重要な時間と位置づけられる。



## 2 評価規準（ルーブリック）

下表の上3行の内容は、国立教育政策研究所で出された観点別の評価規準である。しかし、この規準から、具体的な評価に結びつけることは困難であるため、表の4行目以下に、より具体的な評価の判断規準を設けた。これを生徒にも示すことにより、学びに向かう姿勢を含めた多面的な評価を行うことを教師と生徒が確認する。

	関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
データ分析全般	データの散らばり及びデータの相関に関心をもつとともに、統計的な考え方のよさを認識し、それらを事象の考察に活用しようとしている。	事象をデータを用いて考察し、その傾向などを的確に表現することができる。	事象をデータを用いて表現・処理する仕方やデータの傾向を把握する方法などの技能を身に付けている。	データの分析における基本的な概念、原理・法則などを理解し、知識を身に付けている。
データの散らばり	四分位数、四分位偏差、分散及び標準偏差などを用いてデータの傾向を把握し、それらを事象の考察に活用しようとしている。	四分位数、四分位偏差、分散及び標準偏差などを用いてデータの傾向を捉え、それらを的確に表現することができる。	四分位数、四分位偏差、分散及び標準偏差などを求めることができる。	四分位数、四分位偏差、分散及び標準偏差などの意味を理解している。
データの相関	散布図や相関係数などを用いてデータの相関を把握し、それらを事象の考察に活用しようとしている。	散布図及び相関係数などを用いてデータの傾向を捉え、それらを的確に表現することができる。	散布図を描いたり、相関係数を求めたりすることができる。	散布図及び相関係数などの意味を理解している。
具体的判断基準 (例)	身の周りから自発的にデータを収集しまとめている(レポート)	ヒストグラムから分布の特徴を考察できる	度数分布表を作成し相対度数を求めることができる	代表値と散布度の説明ができる
	グループでの討議に積極的に関わっている(グループ活動・授業の様子)	箱ひげ図からデータの特徴を考察できる	度数分布表からヒストグラムを作ることができる	平均値・中央値・最頻値の意味がわかる
	授業の内容をわかりやすくノートにまとめている(ノート提出)	ヒストグラムと箱ひげ図の関係を考察できる	度数分布表から平均値を求めることができる	箱ひげ図とは何かを説明できる
		2つの変量の傾向を相関係数などから考察できる	データをまとめ中央値・最頻値を求めることができる	相関係数から相関の強弱を示せる
		データをどのように整理すればよいか考えることができる	データから四分位数を求め箱ひげ図を作ることができる	
			簡単なデータの分散を求めることができる	
			2つの変量データから散布図を作ることができる	
		簡単な相関係数を求めることができる		

## 3 授業の展開

### ① 導入：小中の既習事項の確認

小学校2年から中学校1年までの既習内容を、教科書をもとに振り返る活動。班編成による教え合いを中心の活動を行う。特に、小6の単元を重点的に行う。

	データの全体の様子を見る(分布)	データの特徴を1つの数で表す(代表値)	データの散らばり具合を一つの数で表す(散布度)	2つのデータの関係を調べる(相関)
小学校	2	棒グラフ		
	3	一次元表		
	4	折れ線グラフ		
	5	円グラフ		
	6	度数分布	平均値	
中学校	1	相対度数分布表	中央値(メジアン)	
	1	度数分布表	最頻値(モード)	
高校	1	箱ひげ図		
	1		分散・標準偏差	
			四分位範囲	
			散布図・相関表	
			相関係数	
			共分散	

## ② 展開：本時の学習目標の提示からデータ分析の3つのポイントを提示

小中の教科書の内容からデータの整理と分析の3つのポイントを示し、本時の学習目標の提示に進む。

ポイント1：散らばっているデータから「表にまとめる」・「グラフ、図にまとめる」

ポイント2：まとめられたデータから代表値や散らばり具合を数量化する

ポイント3：表、グラフ、図や、代表値及び散布度からデータの性質を読み取る。

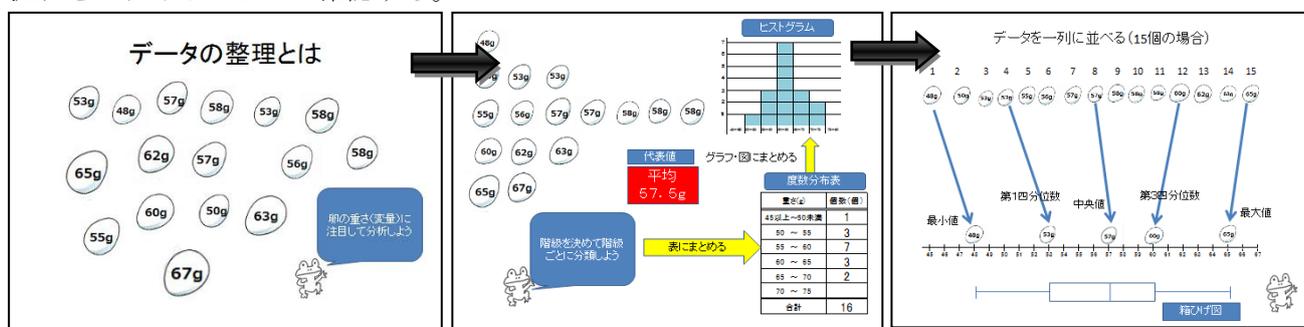
【生徒に提示する本時の学習目標】

「データの分析」これまでとこれから ～データ分析の「手」と「目」と「心」～

- I 「手」：表・グラフにまとめたり、平均値などを求める手腕（数学的技能・知識理解）
- II 「目」：まとめられた表やグラフからデータの性質を読み取る目（数学的な見方・考え方）
- III 「心」：身の回りから分析する対象を積極的に探し、見つけようとする心（関心・意欲・態度）

### ● I に関わって（「手」）

小学校6年生の資料の整理の考え方をまとめ、データを分析しやすいようにまとめるまでの基本的な流れをスライドによって確認する。



次に、15個のランダムデータを紙板書によって提示し、それを集計する一連の作業を、生徒と共同で行う（教師が主導で行う演示実験）。度数分布表、ヒストグラムから、更に数直線上にデータを整理させることで、散らばり具合を考察させ、今後に登場する「箱ひげ図」を展望するところまで進む。

### ● II に関わって（「目」）

小学校6年、中学1年の問題文が「特徴をのべよ」「わかることをいえ」という形式になっていることをスライドによって示す。作表や代表値を計算することがゴールではなく、それを見てどう分析する目をもつかが大切であることを示す。

次に、データを分析する目を持つための1つのポイントとして、平均値だけで考えることの危険性（散らばり具合や、分布の形の必要性）を示すために、次の2つの問を立ててグループで考えてもらう。

【問1】 コジロー企画と、しもまち商事という2つの会社があります。どちらも社員数は100人で、業務内容は同じなのですが、コジロー企画の社員の平均月給は50万円、一方、しもまち企画の方は30万円です。ところが、コジロー企画の多くの社員が会社をやめたがっているというのです。なぜだと思いませんか？

【問2】 ガンバミミズモータースと、元気ネコ自動車教習所という、2つの自動車学校があります。それぞれに通う教習生100人の、運転免許の学科試験の平均得点は、ガンバが60点、元気が70点ということです。ところが、人気があるのはガンバミミズモータースの方なのだそうです。なぜだと思いませんか？

生徒から出てくる解答は、問1では「しもまち商事の方が福利厚生がしっかりしている」とか、「コジロー企画はパワハラが横行している」など。また、問2では「ガンバミミズモータースの教官が優しい」などという意見が現れる。

問1の補足データとして、次の度数分布表を提示する。

<コジロー企画>

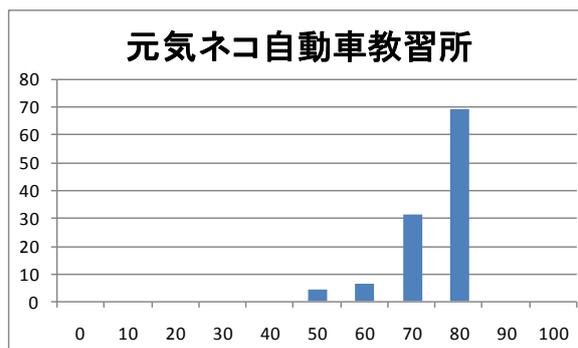
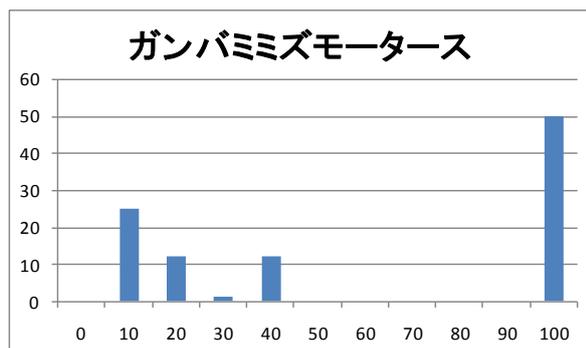
給与	人数	給与×人数
¥ 40,100,000	1	40,100,000
¥ 190,000	40	7,600,000
¥ 100,000	19	1,900,000
¥ 10,000	40	400,000
合計	100	50,000,000
平均		500,000

<しもまち商事>

給与	人数	給与×人数
¥ 500,000	5	2,500,000
¥ 400,000	25	10,000,000
¥ 300,000	38	11,400,000
¥ 200,000	26	5,200,000
¥ 150,000	6	900,000
合計	100	30,000,000
平均		300,000

つまり、コジロー企画では、社長？1人が4千万円以上の給料をもらっていて、彼を除いた社員の平均給料は、10万円であることがわかる。それに比べて、しもまち商事は、バランス良く給料が配分されている。

次に、問2の補足データとして、それぞれの自動車学校の得点分布のヒストグラムを示す。



自動車免許の学科試験は90点以上とらなければ合格とはならないことに注意すると、このヒストグラムから、ガンバは、50名の合格者を出しているけれど、平均点の高い元気ネコの方は、1人も合格者を出していないことが理解できる。

このような問題によって、平均という代表値だけで物事を判断することが危険であることを示す。

### ● Ⅲに関わって

事前アンケートを一覧にまとめたデータシートから、グループで相談し、資料のまとめを行う。テーマを決め、どのように整理するか検討し、結果の分析まで行くことが理想だが、時間がないので、作業をやりながら次時につなげる形で終了する。

<事前アンケート>

「データの整理」授業のためのアンケート

アンケートに協力をお願いします。

- 性別と生まれた月を教えてください (○をつけて下さい)

男	女	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

- 数学は好きですか嫌いですか (当てはまる番号に○をつけて下さい)

①	②	③	④	⑤
大嫌い	嫌いな方	どちらでもない	好きな方	大好き

- 英語は好きですか嫌いですか (当てはまる番号に○をつけて下さい)

①	②	③	④	⑤
大嫌い	嫌いな方	どちらでもない	好きな方	大好き

- 国語は好きですか嫌いですか (当てはまる番号に○をつけて下さい)

①	②	③	④	⑤
大嫌い	嫌いな方	どちらでもない	好きな方	大好き

- 体育は好きですか嫌いですか (当てはまる番号に○をつけて下さい)

①	②	③	④	⑤
大嫌い	嫌いな方	どちらでもない	好きな方	大好き

- あなたは、下の写真でどれが一番高校生らしいと思いますか。(○をつけて下さい) 膝



( A ) ( B ) ( C ) ( D ) ( E ) ( F )

生徒に事前に配ったアンケート。身近な例をとりあげて、授業へ向かうモチベーションを高める。このような事前課題は教科書の進度を確保するために宿題を与えるような予習とは異なり、授業をアクティブにするための準備として与えられる。これが反転授業の精神である。

生徒のアンケート結果をまとめた生データ (教師がまとめる)。ここから、各グループが、自由に何をどのようにまとめるかを話し合い、作表し考察を行う。

no	性別	誕生月	数学	英語	国語	体育	国数英得点	全教科得点	スカート
1	男	4	2	2	3	4	7	11	D
2	男	8	2	2	2	2	6	8	D
3	男	3	3	1	3	4	7	11	D
4	男	9	3	1	1	5	5	10	E
5	男	8	3	3	3	3	9	12	C
6	男	12	4	1	3	3	8	11	B
7	男	9	1	2	3	4	6	10	D
8	男	10	3	2	3	5	8	13	D
9	男	8	1	1	4	5	6	11	A
10	男	7	1	4	3	3	8	11	D
11	男	1	1	2	4	4	7	11	D
12	男	1	3	1	3	5	7	12	D
13	女	1	4	4	1	5	9	14	C
14	女	5	1	2	4	4	7	11	D
15	女	8	2	3	4	5	9	14	D
16	女	10	1	5	4	5	10	15	D
17	女	3	2	3	4	3	9	12	D
18	女	6	1	2	3	4	6	10	C
19	女	3	2	3	2	4	7	11	C
20	女	5	3	2	4	3	9	12	D
21	女	11	1	3	4	2	8	10	C
22	女	10	2	2	3	1	7	8	C
23	女	4	2	3	4	3	9	12	C
24	女	10	2	3	3	4	8	12	C
25	女	10	3	3	3	5	9	14	E
合計			53	60	78	95	191	286	



あるグループのまとめた成果物

## 授業実践例② 合同式 (数学 A・整数)

アクティブ・ラーニング型授業のオファーを受けて行った授業。対象生徒は、難関大を中心に大学進学を目指す高校 2 年生の理系クラスである。生徒をアクティブにするためのいくつかのポイントを以下にまとめる。

### 1 授業ポリシー

「合同式」は教科書では整数の単元の発展教材に分類されるが、この式を使いこなすことによって、多くの問題を容易に解くことができるようになる。このような、問題解法のスペシャルな技法の習得により、ある意味、数学の良さを生徒に実感させるとともに、合同式を学ぶ過程で、同値関係や同値類の考え方など、数学に向き合うための本質的な考え方を育てることも目指す。

本時の学習テーマを次のように設定し、生徒に示す。

#### 【学習テーマ】「合同式と友達になろう！」

- 自然な考えから「和の余りは余りの和」「積の余りは余りの積」を納得し合同式の理解につなげる。
- 合同式の性質を用いて不定方程式、剰余の問題を解決する。

また、授業の冒頭に、本時で学ぶ「合同式」が、今後どのように応用され、大学まで繋がっていくかについて、下のような俯瞰図によって示す。



具体的な授業の目標は次の3点にまとめる。

- ① 合同式の記号「 $\equiv$ 」は、等号「 $=$ 」と「ほぼ同じように」扱えることを実感すること。  
(同値関係の捉え方)
- ② 「和の余りは余りの和」「積の余りは余りの積」「べきの余りは余りのべき」に自然に気づくこと。  
(同型の考え方)
- ③ 最終的に以下のようなタイプの問題が解けるようになること。(問題を解く技能)

## ■ Chapter 1 ウォーミングアップ問題

- (1) 7777710 を7で割った余りを求めよ。また 77777723 を7で割った余りを求めよ。
- (2)  $A=7777710$  ,  $B=77777723$  とすると、 $2A+B+AB$  を7で割った余りはどうなるだろうか。  
グループで考えてみよう。
- (3)  $x$  の整式  $f(x)$  を  $x-1$  で割った余りが4、を  $x^2+x+1$  で割った余りが  $x$  である。  
このとき、 $f(x)$  を  $x^3-1$  で割った余りを求めよ。

## ■ Chapter 2 挑戦問題

### 【べき乗の余りの問題】

- (1)  $23^{2016}$  を7で割ったときの余りを求めよ。★
- (2)  $10^{100} + 11^{100}$  を7で割ったときの余りを求めよ。★★
- (3) 整数  $a, b, c$  に対して  $a^2 + b^2 - 6ab = c^2$  が成り立つとき、 $a, b$  の少なくとも一方は3の倍数であることを示せ。★★★

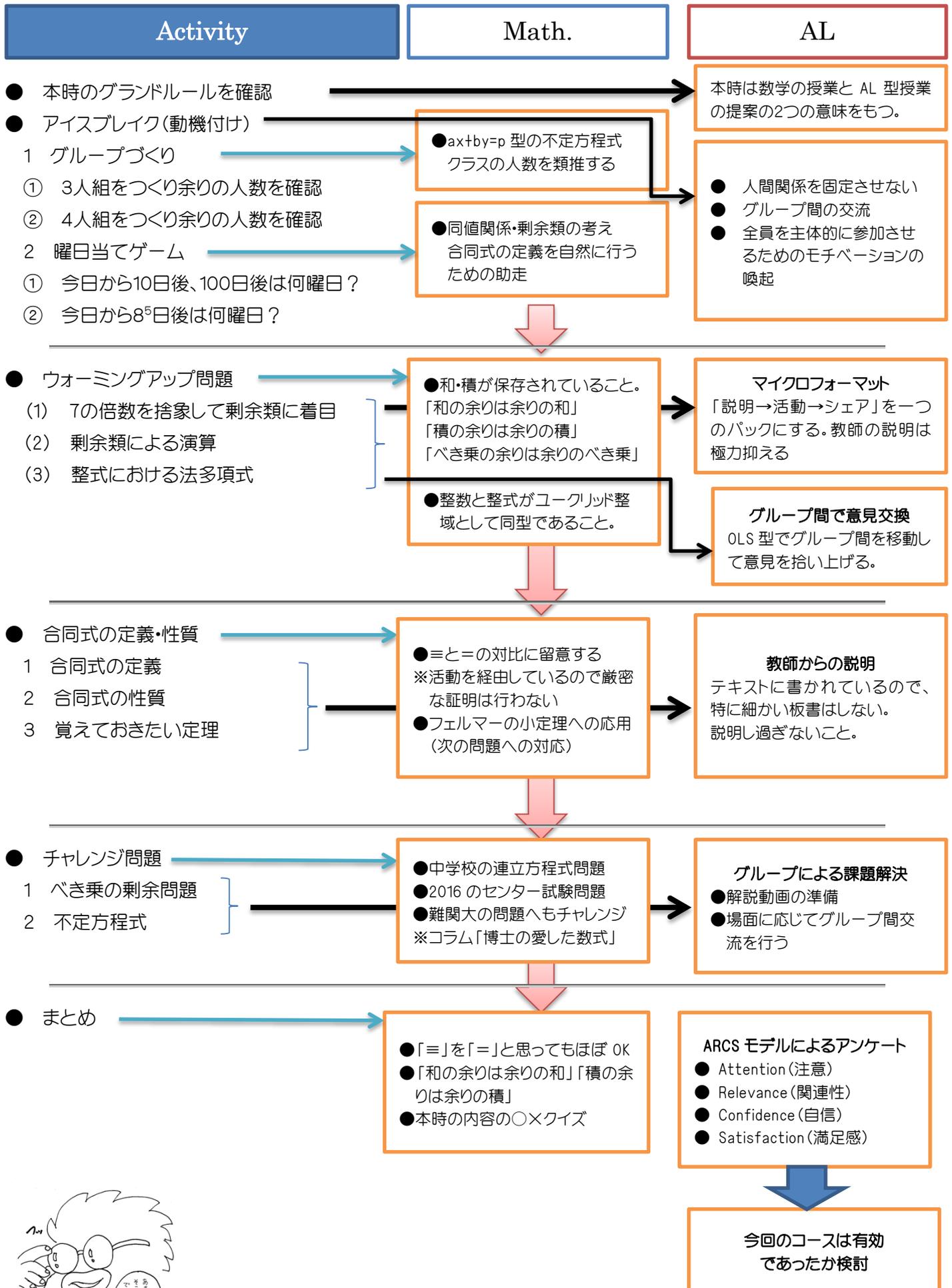
### 【不定方程式】 ★★

- (1) よしひろさんは、1個 300 円のケーキと、1個 350 円のケーキを合わせて  個買い、3300 円はらいました。300 円のケーキと 350 円のケーキをそれぞれ何個買ったのでしょうか(どちらも少なくとも1個は買っています)。  
(「東京書籍 中学数学2年」の問題より一部改題)
- (2) 不定方程式  $92x + 197y = 1$  を満たす整数  $x, y$  の組の中で  $x$  の絶対値が最小のものを求めよ。  
(2016 センター試験)

※ 不定方程式(バズーの等式)の問題は後でユークリッドの互除法を学んだあとに出てきます。ここでは、合同式を用いて解く手法を考えます。

## 2 授業の展開

アイスブレイク→ウォーミングアップ問題→合同式の定義・性質→グループによる問題解決→まとめ、という流れで進める。以下に指導案を示す。この指導案は、アクティブ・ラーニング型の授業に対応したもので、数学の指導内容と、生徒をアクティブに動かすための留意事項を平行に示したものである。



### 3 評価

授業後に次のような授業アンケートにより、態度評価と、授業評価を行う。

#### 授業アンケート

今日の授業について、①～④のいずれかに○をつけて答えて下さい。

- ①よくあてはまる
- ②まああてはまる
- ③あまり当てはまらない
- ④全くあてはまらない

- 【質問1】 今回の授業は面白かった ( ① ② ③ ④ )
- 【質問2】 自分の今後に役に立つ内容だった ( ① ② ③ ④ )
- 【質問3】 理解できる内容だった ( ① ② ③ ④ )
- 【質問4】 達成感が得られ満足である ( ① ② ③ ④ )

以下のような、○×の簡単なクイズを授業後に行う。計算技能や知識だけではなく、概念についてのイメージや、この単元で伝えたいメッセージなども盛り込んでいるところがポイントである(傍線部分)。これは、学びに向かう力を評価するという意味と、このような問を作るために教師が教材研究を深め、授業内容を充実させることを目的としている。

#### クイズ

次にあげる文の内容が正しいと思うときは○、間違っていると思うときは×をつけて下さい。

- [1] 合同式は「和の余りは余りの和」「積の余りは余りの積」とイメージできる。 ( )
- [2]  $27 \equiv 6 \pmod{7}$ とは「27を7で割ると余りが6」という意味である。 ( )
- [3]  $27 \equiv 6 \pmod{7}$ は「27は7を法として6と合同」という言い方をする。 ( )
- [4]  $p$ が素数の時、 ${}_pC_r$ は $1 \leq r < p$ のときすべて $p$ の倍数である。 ( )
- [5] 合同式はRSA公開鍵暗号の開発に貢献している。 ( )
- [6] 合同式「 $\equiv$ 」は「 $=$ 」と同じ同値関係で、「 $=$ 」の場合とほぼ同様の操作が行える。 ( )
- [7] 平方数を3または4で割ると、余りは0か1しかありえない。 ( )
- [8] 不定方程式(ベズーの等式)は合同式を使って解くことができる。 ( )
- [9] 今日が金曜日だとすると100日後は日曜日である。 ( )
- [10] 12345678914の3乗を9で割った余りは8である。 ( )



ご協力ありがとうございました。

#### 4 授業の振り返りより

以下に、授業を終えて記した振り返りコメントから特にアイスブレイクの部分を中心に紹介する。

##### 【アイスブレイク① グループづくり】

30秒で3人一組のグループを作ります。20人くらいの参観者がいらっしやったので、彼らも入ってもらいました。つまり総勢60人程度での活動です。



グループを作ったらその場にしゃがんでもらいます。早くチームを作ることを競うゲームです。すると、グループを作れない人が2人いました。今度は、現在のメンバーとは違うメンバーで4人グループを作ってもらいます。すると、今度は3人余りました。

この活動を通して、授業とは教科の内容を学ぶだけではなく、人間関係を作る場であることを生徒に伝えるのですが、実は、本当の狙いは、合同式に繋げるための間を立てることにあります。教室の中にいる人間の数を  $n$  とすると、3人組が何組かできて2人余ったことと、4人組が何組かできて3人余ったことから、このような式に表せます。

$$\begin{cases} n = 3k + 2 \dots \textcircled{1} \\ n = 4l + 3 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

ここで、生徒のくいつきがよかったので、この段階で、もう合同式を定義することにしました。

$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \dots \textcircled{1}' \\ n \equiv 3 \pmod{4} \dots \textcircled{2}' \end{cases}$$

この式を使って、余りについての様々な計算を行うことが今日のテーマであることを示します。

このような合同式を自由に使いこなせるようになることが本時のゴールの一つでした。

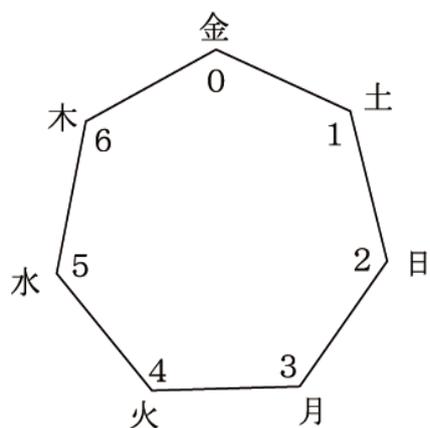
##### 【アイスブレイク② 曜日当て】

「今日は金曜日ですね。では（ ）日後は何曜日でしょう」というクイズを出します。

「明日は何曜日?」「3日後は何曜日?」これはグループで話し合うまでもなく、すぐに手が上がります。では、「100日後は何曜日?」これは少し時間がかかりました。でも数人の生徒がすぐに手をあげます。じゃあということで、次の問題を出しグループで話し合ってもらいます。

- 1000日後は何曜日
- 10日前は何曜日
- 100日前は何曜日
- 8の10乗日後は何曜日

考えている間に次のようなヒントの図を板書します。



大切なことは、グループの全員が理解することです。グループ活動の様子を見ながら行う私のアドバイスは「グループ全員がわかるように」のみです。

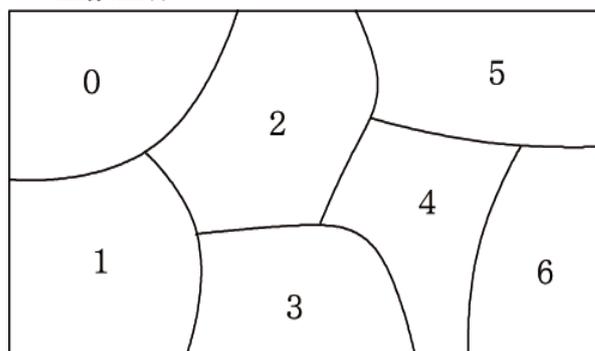
生徒からは、「100の代わりに100を7で割った余りの2で考えればよい」「10日前は-10日後と考え、-10に7を2回足すと4なので『10日前』は『4日後』と考えればよい」「100日前は10日前の10倍だから、『4日後の10倍』→『40日後』→『5日後』と考える」「8日後は1日後と同じ、それを10乗して『1日後』とする」「 $8 = (7+1)$ だから、 $(7+1)$ の10乗は結局『 $(7$ の倍数たち) $+1$ 』となる」などの説明が出されました。

剰余類を説明するため、次の様な図を板書します。整数全体の世界を図の様に7つの部屋に分けて0から6までの数で考えているということです。0~6は6つの村を代表する代議員というカンジですね。例えば「1」の部屋には、8や15や、-6などがあります。これを合同式の記号を使うと

$1 \equiv 8 \equiv 15 \equiv -6 \equiv \dots$  ということです。

このアイスブレイクの時間に、掴んで欲しかったことがほぼ達成されました。

### 整数全体



まとめとして、生徒全員で次のフレーズを合唱して本題に入っていくことにしました。

**「和の余りは余りの和」「積の余りは余りの積」「べきの余りは余りのべき」**

以下次のウォーミングアップ、そして目標のチャレンジ問題に進みます。グループ内解決、ワールドカフェ方式で、グループを超えてのシェアと進みました。チャレンジ問題ではかなり難しい問題も入れていたのですが、終業のチャイムが鳴っても問題を解き続ける生徒達の姿に感心しました。

